Dunque questa singolarità ha esattamente un punto doppio nel primo intorno e due semplici nel secondo; il suo albero è $\left[\begin{smallmatrix} & 2 & \\ & 2 & \\ 1 & & 1\end{smallmatrix}\right]$, e classicamente una singolarità con tale struttura viene chiamata tacnodo.

-1.6.6. Ecsnodo. Consideriamo la curva affine $(X^2-Y)^2-Y^3$ (l'origine è punto doppio con unica tangente d'ordine 4). La forma proiettiva è $X_0^2X_2^2-X_0X_2(2X_1^2-X_2^2)+X_1^4$, che noi cambiamo in $X_0^2(X_1{+}X_2)^2-X_0(X_1{+}X_2)(2X_1^2-(X_1{+}X_2)^2)+X_1^4$ per evitare le rette eccezionali nel cono tangente. La trasformata quadratica stretta è $X_1^2X_2(X_2{+}X_1)^2-X_0X_1(2X_2^2-(X_2{+}X_1)^2)+X_0^2X_2^3$ che in $V(X_0)$ presenta un unico punto non eccezionale di ordine 2, con unica tangente d'ordine 4. Infatti il cambiamento di coordinate $Y_0=X_1$, $Y_1=X_0$ e $Y_2=X_1{+}X_2$ lo porta nell'origine per la curva $Y_0^2(Y_2{-}Y_0)Y_2^2-Y_0Y_1(2(Y_2{-}Y_0)^2-Y_2^2)+Y_1^2(Y_2{-}Y_0)^3$, che si riordina rispetto all'origine come $Y_0^3(Y_1{+}Y_2)^2-Y_0^2(Y_1{+}Y_2)(3Y_1{+}Y_2)+Y_0(3Y_1^2{+}Y_1Y_2{-}Y_2^2)+Y_1^2Y_2^3$. Ora, una ulteriore trasformazione quadratica mostra che il nuovo punto ottenuto è un tacnodo, cioè contiene un nodo nel suo primo intorno. Dunque la singolarità di partenza ha esattamente un punto doppio nel primo intorno, un punto doppio nel secondo e due semplici nel terzo; il suo albero è $\left[\begin{smallmatrix} & 2 & \\ & 2 & \\ & 2 & \\ 1 & & 1\end{smallmatrix}\right]$, e classicamente una singolarità con tale struttura viene chiamata ecsnodo.

-1.6.7. Supernodi e supercuspidi. In generale i punti doppi con unica tangente d'ordine m possono avere due tipi di alberi, formati da una sequenza di punti doppi e terminanti con un punto semplice (supercuspidi) oppure con due punti semplici (supernodi). Si noti che si tratta di supernodi oppure supercuspidi a seconda che la molteplicità della tangente sia pari o dispari, ma la lunghezza dell'albero non è determinata dall'ordine della tangente!

-1.6.8. Punti tripli. Un punto triplo ordinario ha albero $\left[\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right]$, ovvero tre punti semplici nel suo primo intorno.

Un punto triplo con due tangenti (una doppia) può avere alberi del tipo $\left[\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 1\end{smallmatrix}\right]$ oppure $\left[\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \\ & & 1\end{smallmatrix}\right]$ oppure $\left[\begin{smallmatrix} & 3 & & \\ 1 & & 2 & \\ & 1 & & 1\end{smallmatrix}\right]$. Farsi qualche esempio con curve affini del tipo $XY^2+\cdots$.

Un punto triplo con unica tangente (quindi di molteplicità tre) possiede alberi che cominciano con una sequenza di 3, e possono terminare nei seguenti modi: $\left[\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right]$ (nell'ultimo intorno c'è un punto triplo ordinario), $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1\end{smallmatrix}\right]$ (nell'ultimo intorno c'è una 3-cuspide ordinaria), $\left[\begin{smallmatrix} & 3 & \\ & 2 & \\ 1 & & 1\end{smallmatrix}\right]$ (nell'ultimo intorno c'è un nodo ordinario), $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1\end{smallmatrix}\right]$ (nell'ultimo intorno c'è una cuspide ordinaria), oppure con un punto triplo avente due tangenti, e quindi $\left[\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 1\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \\ & & 1\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} & 3 & & \\ 1 & & 2 & \\ & 1 & & 1\end{smallmatrix}\right]$. Farsi qualche esempio con curve affini del tipo $Y^3+\cdots$.

-1.6.9. Quadrifoglio. Il quadrifoglio di equazione $(X^2{+}Y^2)^3-4X^2Y^2$ ha un punto quadruplo nell'origine che presenta due nodi nel primo intorno infinitesimale; dunque il suo albero è $\left[\begin{smallmatrix} & & & 4 & & & \\ & 2 & & & & 2 & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1\end{smallmatrix}\right]$.

-1.6.10. Singolarità iperellittiche. La curva di equazione $Y^{2n-2}=X^{2n}-Y^{2n}$ ha un punto singolare nell'origine di molteplicità $2n{-}2$ che presenta nel primo intorno un unico punto, che è un supernodo. Invece la curva di equazione $Y^{2n-1}=X^{2n+1}-Y^{2n+1}$ ha un punto singolare nell'origine di molteplicità $2n{-}1$ che presenta nel primo intorno un unico punto, che è una supercuspide. Dunque gli alberi delle due singolarità sono del tipo $\left[\begin{smallmatrix} & 2n{-}2 & \\ & 2 & \\ & \vdots & \\ & 2 & \\ 1 & & 1\end{smallmatrix}\right]$ e $\left[\begin{smallmatrix} 2n{-}1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1\end{smallmatrix}\right]$; si osservi dunque che le singolarità iperellittiche si comportano diversamente per gradi pari e dispari delle curve.

-1.6.11. Per esercizio, si considerino le singolarità delle parabole generalizzate.

-1.7. Teorema (Noether, versione classica). *Se due curve $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ di equazioni f e g hanno in comune solo punti ordinari, singolari ordinari o cuspidi, allora una curva $\mathscr{H}$ di equazione h si scrive $h=af+bg$ se e solo se per ogni punto comune P dell'intersezione e dei loro intorni si ha $m_P(\mathscr{H})\geqslant m_P(\mathscr{C})+m_P(\mathscr{D})-1$. In tal caso a e b definiscono delle curve $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ tali che $m_P(\mathscr{M})\geqslant m_P(\mathscr{D})-1$ e $m_P(\mathscr{N})\geqslant m_P(\mathscr{C})-1$ per ognuno dei punti comuni.*

La molteplicità dei punti negli intorni di uno dato vanno intese come le molteplicità dei corrispondenti punti delle curve trasformate strette tramite trasformazioni quadratiche.