Dunque il nodo ha due punti semplici nel suo primo intorno e albero $\left[{}_{1}{}^{2}{}_{1}\right]$.

-1.6.2. Punti ordinari. Il risultato precedente si generalizza immediatamente: i punti ordinari m-upli hanno esattamente m punti semplici nel primo intorno: il loro albero è $[{}_1 \overset{m}{\cdots} {}_1]$ (il fatto che le tangenti abbiano ordini elevati interviene solo per rendere punti di flesso i punti del primo intorno).

Infatti, se il punto è l'origine e l'equazione affine

$$f_m(X,Y) + f_{>m}(X,Y) \qquad \text{con } f_m(X,Y) = \Pi_i(X-\alpha_i Y),$$

allora l'equazione proiettiva è

$$X_0^{d-m} f_m(X_1,X_2) + X_0^{<d-m} f_{>m}(X_1,X_2)$$

e la trasformata quadratica stretta (un divisore di)

$$(X_1X_2)^{d-m} f_m(X_2,X_1) + (X_1X_2)^{<d-m} X_0^{>0} f_{>m}(X_2,X_1)\ ,$$

che ha m intersezioni distinte con $V(X_0)$ date da $\Pi_i(X_2-\alpha_i X_1)=0$. Se operiamo il cambiamento di coordinate ($Y_0=X_0$, $Y_1=X_1$ e) $Y_2=X_2-\alpha_i X_1$ e disomogeneizziamo rispetto a Y_1 si vede subito che ogni punto del primo intorno è semplice.

-1.6.3. Cuspide. Consideriamo ora la cubica di equazione affine Y^2-X^3 (cuspide nell'origine), dunque proiettiva $X_0X_2^2-X_1^3$. Poiché la retta tangente è una delle rette eccezionali della trasformazione standard, cambiamo leggermente il riferimento per avere l'equazione $X_0(X_1{+}X_2)^2-X_1^3$. Ora la trasformata è $X_1X_2(X_0X_2{+}X_0X_1)^2-X_0^3X_2^3$, e la trasformata stretta $X_1(X_2{+}X_1)^2-X_0X_2^2$, che presenta in $V(X_0)$ il punto eccezionale P_2 e il punto $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$. Quest'ultimo risulta semplice, come si può vedere usando il cambiamento di coordinate $Y_0=X_0$, $Y_1=X_1$ e $Y_2=X_1{+}X_2$ che lo porta in P_1, e disomogeneizzando rispetto a Y_1 la curva $Y_1Y_2^2-Y_0(Y_2{-}Y_1)^2$.

Dunque una cuspide ordinaria ha esattamente un punto semplice nel primo intorno e albero $\left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right]$.

-1.6.4. m-Cuspidi ordinarie. Per generalizzare, chiamiamo m-cuspidi ordinarie i punti singolari d'ordine m con una unica tangente di classe 1. Le m-cuspidi ordinarie hanno esattamente un solo punto semplice nel primo intorno: $\left[\begin{smallmatrix}m\\1\end{smallmatrix}\right]$.

Infatti, se il punto è l'origine e la tangente $X+Y$ abbiamo una curva del tipo

$$(X+Y)^m + f_{m+1}(X,Y) + f_{>m+1}(X,Y) \qquad \text{con } (X+Y) \text{ che non divide } f_{m+1}(X,Y)$$

(cioè: $f_{m+1}(-1,1)\neq 0$). Allora la sua equazione proiettiva è

$$X_0^{d-m}(X_1+X_2)^m + X_0^{d-m-1} f_{m+1}(X_1,X_2) + X_0^{<d-m-1} f^{\mathrm{h}}_{>m+1}(X_1,X_2)$$

e la sua trasformata quadratica stretta è (un divisore di)

$$\begin{aligned}(X_1X_2)^{d-m}(X_2+X_1)^m &+ (X_1X_2)^{d-m-1}X_0 f_{m+1}(X_2,X_1)\\ &+ (X_1X_2)^{<d-m-1}X_0^{>2} f^{\mathrm{h}}_{>m+1}(X_2,X_1).\end{aligned}$$

L'intersezione non eccezionale con $V(X_0)$ è l'unico punto $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ e l'usuale sostituzione dà

$$\begin{aligned}Y_1^{d-m}(Y_2-Y_1)^{d-m}Y_2^m &+ Y_1^{d-m-1}(Y_2-Y_1)^{d-m-1}Y_0 f_{m+1}(Y_2-Y_1,Y_1)\\ &+ Y_1^{<d-m-1}(Y_2-Y_1)^{<d-m-1}Y_0^{>2} f^{\mathrm{h}}_{>m+1}(Y_2-Y_1,Y_1).\end{aligned}$$

e disomogeneizzando rispetto a Y_1 si ottiene quanto voluto (il termine lineare Y_0 si ottiene dal secondo addendo: perché?).

-1.6.5. Tacnodo. Consideriamo la curva affine $Y^2+Y^3+X^4$ (l'origine è punto doppio con unica tangente d'ordine 4). La forma proiettiva è $X_0^2X_2^2+X_0X_2^3+X_1^4$, che noi cambiamo in $X_0^2(X_1{+}X_2)^2+X_0(X_1{+}X_2)^3+X_1^4$ per evitare le rette eccezionali nel cono tangente. La trasformata quadratica standard è $(X_1X_2)^2(X_0X_2{+}X_0X_1)^2+X_1X_2(X_0X_2{+}X_0X_1)^3+(X_0X_2)^4$ e quella stretta diventa $X_1^2X_2(X_2{+}X_1)^2+X_0X_1(X_2{+}X_1)^3+X_0^2X_2^3$. Nella retta $V(X_0)$ l'unico punto non eccezionale è $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$, e la trasformazione di coordinate $Y_0=X_1$, $Y_1=X_0$ e $Y_2=X_1{+}X_2$ lo trasforma nell'origine per la curva $Y_0^2(Y_2{-}Y_0)Y_2^2+Y_0Y_1Y_2^3+Y_1^2(Y_2{-}Y_0)^3$. Qui si tratta chiaramente di un punto doppio ordinario, poiché disomogeneizzando rispetto a Y_0 abbiamo complesso tangente $Y_1^2-Y_2^2$; quindi una ulteriore trasmormazione quadratica lo trasforma in una coppia di punti semplici.