stati aggiunti tre punti singolari ordinari nei tre punti fondamentali (di molteplicità rispettivamente $d, d-m, d-m$ per P_0, P_1, P_2); il punto P è stato trasformato in $r(\leqslant m)$ punti $P_1, \ldots, P_r$ ciascuno di molteplicità m_i tali che $\sum_i m_i \leqslant m$ (perché?). Allora la differenza $\iota - \iota'$ tra gli indici di $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ è

$$\iota - \iota' = (m-1) - \sum_{i=1}^{r}(m_i - 1) = m - \sum_{i=1}^{r} m_i + k - 1 \geqslant 0$$

ed è nullo se e solo se $k = 1$ e $m_1 = m$. Se $\iota - \iota' > 0$, per ipotesi induttiva abbiamo concluso. Altrimenti vediamo che è sceso la deficienza: infatti calcolando

$$\delta - \delta' = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \left(\frac{(2d-m-1)(2d-m-2)}{2} - \frac{(d)(d-1)}{2} - 2\frac{(2d-m)(2d-m-1)}{2}\right) = m^2 - m$$

che è certamente positivo, poiché $m \geqslant 2$, e quindi usiamo comunque l'ipotesi induttiva. □

-1.4.1. GENERE DELLE CURVE. Parlando della deficienza, abbiamo già detto che nel caso di curve con singolarità ordinarie essa coincide con il genere (per definizione, per noi, visto che non abbiamo dato una vera definizione del genere). Se decidiamo che il genere è invariante per "trasformazioni birazionali", in particolare per quelle di Noether, abbiamo un modo per calcolarlo: basta ordinarizzare tutte le singolarità, e poi calcolare la deficienza della curva ordinarizzata. Si noti che la deficienza è invariante per proiettività, ma non per trasformazioni birazionali (non lo è in particolare per quelle di Noether), mentre il genere dev'essere un invariante birazionale (dunque anche proiettivo, ma molto di più).

-1.5. DEFINIZIONE-TEOREMA (STRUTTURA DELLE SINGOLARITÀ). *Per ogni punto m-uplo P di una curva $\mathscr{C}$ consideriamo una sequenza di trasformazioni quadratiche che lo trasformi in un insieme di punti semplici; definiamo allora:*

(1) *primo intorno di P: è formato dai punti P_i (diciamo m_i le loro molteplicità) che si ottengono da P via la prima trasformazione;*

(2) *secondo intorno di P: è formato dai punti $P_{i,j}$ (diciamo $m_{i,j}$ le loro molteplicità) che si ottengono dai P_i via la trasformazione successiva necessaria su P_i;*

(3) *terzo intorno di P: è formato dai punti $P_{i,j,k}$ (diciamo $m_{i,j,k}$ le loro molteplicità) che si ottengono dai $P_{i,j}$ via la trasformazione successiva necessaria su $P_{i,j}$;*

(n) *e così via.*

Questi intorni di P non dipendono dalla sequenza di trasformazioni quadratiche che si utilizzano per trasformare P in punti semplici.

Evitiamo la dimostrazione, difficile e molto tecnica.

-1.5.1. STRUTTURA AD ALBERO. Dalla definizione precedente, si può rappresentare la struttura di un punto m-plo usando un albero (a nodi pesati con numeri naturali) che riporti ad ogni livello di fogliazione l'intorno successivo a quello cui si era arrivati. Si tratta quindi di strutture del tipo:

$$\overbrace{m_1\ \ \overbrace{m_{21}\ m_{22}}^{m_2}\ \ \overbrace{m_{31}\ m_{32}\ \overbrace{m_{331}\ m_{332}}^{m_{33}}}^{m_3}\ \ \overbrace{\overbrace{m_{411}\ m_{412}}^{m_{41}}\ \ \overbrace{m_{421}\ \overbrace{m_{4221}\ m_{4222}}^{m_{422}}}^{m_{42}}}^{m_4}}^{m}$$

(le fogliazioni estreme hanno tutte peso 1) che rappresentano graficamente la struttura della singolarità.

-1.6. ESEMPI. Riportiamo alcuni esempi per le singolarità più semplici.

-1.6.1. NODO. Consideriamo per esempio la cubica di equazione $Y^2 - X^2 - X^3$ (punto doppio ordinario nell'origine). Dalla forma omogenea $X_0X_2^2 - X_0X_1^2 - X_1^3$ (il complesso tangente non contiene rette eccezionali) otteniamo la trasformata totale $X_1X_2(X_0X_1)^2 - X_1X_2(X_0X_2)^2 - (X_0X_2)^3$, da cui la trasformata stretta $X_1^3 - X_1X_2^2 - X_0X_2^2$. L'intersezione con la retta $X_0 = 0$ contiene, oltre al punto eccezionale P_2 (capita perché la retta eccezionale impropria vi era tangente) i due punti $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ che sono non singolari. Infatti, il cambiamento di coordinate $Y_0 = X_0$, $Y_{1,2} = X_1 \pm X_2$ sposta i due punti in $P_{1,2}$, e la curva in $2(Y_1+Y_2)Y_1Y_2 - Y_0(Y_1-Y_2)^2$ (ora basta disomogeneizzare rispetto a $Y_{1,2}$ rispettivamente per vedere che si tratta di punti non singolari con tangenti $V(Y_{2,1})$ rispettivamente).