(3) Si può vedere utilizzando il fatto che la trasformata stretta è della forma

$$\begin{aligned}&X_1^{d-\alpha_0-\alpha_1}X_2^{d-\alpha_0-\alpha_2}f_{\alpha_0}(X_2,X_1)\\ &+X_1^{d-\alpha_0-\alpha_1-1}X_2^{d-\alpha_0-\alpha_2-1}X_0^1 f_{\alpha_0-1}(X_1,X_2)\\ &+X_1^{d-\alpha_0-\alpha_1-2}X_2^{d-\alpha_0-\alpha_2-2}X_0^2 f_{\alpha_0-2}(X_1,X_2)\\ &+\cdots+X_1^{-\alpha_1}X_2^{-\alpha_2}X_0^{d-\alpha_0}f_d(X_1,X_2)\end{aligned}$$

(dalla dimostrazione di (1)), oppure applicando la dimostrazione di (1) alla trasformata stretta. □

-1.2.1. Si osservi che le rette eccezionali non hanno trasformata stretta, come tutte le curve aventi supporto su tali rette.

-1.2.2. Ogni retta non fondamentale (ovvero, non eccezionale per φ) ha come trasformata stretta una retta se (e solo se) passa per uno dei punti fondamentali. Altrimenti?

-1.2.3. La trasformata stretta di una conica irriducibile è una conica se e solo se essa passa per due dei tre punti fondamentali, ed è una retta se e solo se passa per tutti e tre i punti fondamentali.

-1.3. TEOREMA (AZIONE SULLE SINGOLARITÀ). *Data una curva irriducibile $\mathscr{C}$ di grado d, di equazione $g(\underline{X})$ in un fissato riferimento, sia P un suo punto di molteplicità $m = m_P(\mathscr{C})$. La sua trasformata stretta $\mathscr{D}$ tramite la trasformazione quadratica standard presenta allora:*

(1) *un punto m-uplo con corrispondenti molteplicità delle tangenti se P non appartiene a rette eccezionali (qui, fondamentali del riferimento);*
(2) *un insieme di punti distinti sulla retta $V(X_i)$ in corrispondenza biunivoca con le rette distinte del complesso tangente se si trattava del punto fondamentale P_i.*

DIMOSTRAZIONE.

(1) Si può supporre che P sia il punto unità, di modo che lui sia la sua stessa immagine, e presentare g nella forma

$$X_0^{d-m}f_m(X_1-X_0,X_2-X_0)+X_0^{d-m-1}f_{m+1}(X_1-X_0,X_2-X_0)+\cdots+f_d(X_1-X_0,X_2-X_0)$$

e applicare la trasformazione quadratica standard:

$$\begin{aligned}&(X_1X_2)^{d-m}f_m(X_0X_2-X_1X_2,X_0X_1-X_1X_2)\\ &+(X_1X_2)^{d-m-1}f_{m-1}(X_1-X_0,X_2-X_0)+\cdots+f_d(X_1-X_0,X_2-X_0)\end{aligned}$$

e sviluppando $X_1^r = ((X_1-X_0)+X_0)^r$, $X_2^r = ((X_2-X_0)+X_0)^r$ e

$$f_m(X_0X_2-X_1X_2,X_0X_1-X_1X_2)=f_m(X_0X_2,X_0X_1)-X_1X_2f'_m(X_0X_2,X_0X_1)+\cdots$$

si vede subito che la potenza minima con cui compare X_0 dà il termine $X_0^{2d-m}f_m(X_2,X_1)$ il che dimostra quanto volevamo.

(2) È scritto nel(la dimostrazione del) teorema precedente. □

-1.4. TEOREMA (ORDINARIZZAZIONE DI SINGOLARITÀ). *Con una serie di trasformazioni quadratiche (di prima specie), ogni curva può essere trasformata in una curva avente solo singolarità ordinarie, cioè punti multipli a tangenti distinte.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo l'indice ι della curva $\mathscr{C}$ come il numero naturale $\sum_P(m_P\mathscr{C}-1)$ ove la somma è estesa a tutti i punti multipli non ordinari. La dimostrazione si fa per doppia induzione sull'indice ι e sulla deficienza δ della curva.

Se l'indice è zero, non abbiamo nulla da fare (non ci sono punti non ordinari). Se invece l'indice ι è positivo, allora scegliamo un punto P non ordinario di molteplicità m, e un sistema di riferimento in cui:

(*a*) P sia l'origine;
(*b*) i due assi coorrdinati per P intersechino $\mathscr{C}$ in $d-m$ punti distinti (oltre P);
(*c*) l'asse improprio intersechi d punti distinti di $\mathscr{C}$ non fondamentali.

Applicando la trasformazione quadratica standard a $\mathscr{C}$ otteniamo una curva trasformata stretta $\mathscr{C}'$ di grado $2d-m$ tale che: le singolarità diverse da P sono rimaste dello stesso tipo di partenza; sono