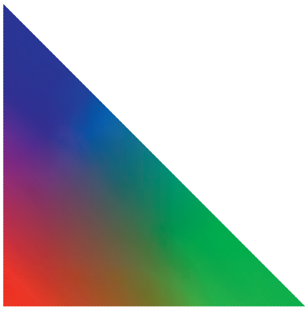
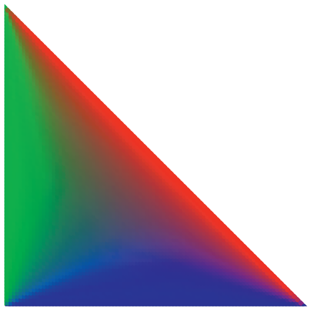
siano definite.

(3) se i tre punti base sono coincidenti, allora possiamo supporre che sia l'origine affine standard del riferimento di $\mathbb{P}$, e la rete di coniche sia quella delle osculatrici a $X_1^2+X_0X_2$ in quel punto (con la retta $V(X_2)$ come tangente comune); dunque la rete è generata da X_1X_2, X_2^2 e $X_1^2+X_0X_2$. Allora la trasformazione quadratica si può scrivere come $\varphi\begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \xi_0X_1X_2+\xi_1X_2^2+\xi_2(X_1^2+X_0X_2)$. L'azione sui punti può essere rappresentata come $\varphi\begin{pmatrix}X_0\\ X_1\\ X_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_1X_2\\ X_2^2\\ X_1^2+X_0X_2\end{pmatrix}$ che si vede avere come inversa l'applicazione quadratica $\varphi\begin{pmatrix}X_0\\ X_1\\ X_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_1X_2-X_0^2\\ X_0X_1\\ X_1^2\end{pmatrix}$, ovunque siano definite.

-1.1.3. Nel seguito useremo solo trasformazioni quadratiche del primo tipo, che saranno chiamate trasformazioni quadratiche standard (senza specificare altro) oppure trasformazioni noetheriane; quindi si cerchi di capirne bene l'aspetto geometrico intuitivo. Forse questa figura colorata che rappresenta un quadrante del piano proiettivo (i tre lati sono parte dei tre assi coordinati) può dare un suggerimento:

-1.2. Teorema (Azione sulle curve). *Data una curva irriducibile $\mathscr{C}$ di grado d, di equazione $g(\underline{X})$ in un fissato riferimento, la sua trasformata $g(\varphi(\underline{X}))$ tramite la trasformazione quadratica standard ha una espressione del tipo $\underline{X}^{\underline{\alpha}}h(\underline{X})$ ove:*

(1) *l'esponente α_i di X_i è dato dalla molteplicità del punto fondamentale P_i per $\mathscr{C}$: $\alpha_i = m_{P_i}(\mathscr{C})$;*

(2) *$h(\underline{X})$ è polinomio irriducibile di grado $2d-|\alpha|$, che definisce una curva irriducibile $\mathscr{D}$ di grado $\deg(\mathscr{C})-\sum_i m_{P_i}(\mathscr{C})$ (somma sui punti fondamentali del riferimento), detta trasformata stretta di $\mathscr{C}$ tramite φ.*

(3) *La trasformata stretta $\mathscr{D}$ ha nei punti fondamentali P_i molteplicità date da $\deg(\mathscr{C})-\sum_{j\neq i} m_{P_j}(\mathscr{C})$ e le cui tangenti sono in corrispondenza biunivoca, rispettando le molteplicità, con i punti (non fondamentali) di intersezione di $\mathscr{C}$ con la retta $V(X_i)$.*

Dimostrazione.

(1) Osserviamo il punto origine P_0; allora possiamo esprimere la curva come

$$X_0^{d-\alpha_0}f_{\alpha_0}(X_1,X_2)+X_0^{d-\alpha_0-1}f_{\alpha_0+1}(X_1,X_2)+X_0^{d-\alpha_0-2}f_{\alpha_0+2}(X_1,X_2)+\cdots+f_d(X_1,X_2)$$

(come al solito, gli f_i sono omogenei di grado i) e la sua trasformata diventa:

$$\begin{aligned}&(X_1X_2)^{d-\alpha_0}X_0^{\alpha_0}f_{\alpha_0}(X_2,X_1)\\ &+(X_1X_2)^{d-\alpha_0-1}X_0^{\alpha_0+1}f_{\alpha_0+1}(X_1,X_2)\\ &+(X_1X_2)^{d-\alpha_0-2}X_0^{\alpha_0+2}f_{\alpha_0+2}(X_1,X_2)\\ &+\cdots+X_0^df_d(X_1,X_2)\end{aligned}$$

da cui la prima affermazione. Si osservi inoltre che l'intersezione con $X_0=0$ della trasformata ridotta contiene, oltre eventualmente ai due punti fondamentali P_i con molteplicità rispettivamente date da $d-\alpha_0-\alpha_i$, esattamente i punti corrispondenti agli zeri di $f_{\alpha_0}(X_2,X_1)$.

(2) Per assurdo: se $\mathscr{D}$ fosse riducibile, applicando di nuovo la stessa trasformazione quadratica, lo sarebbe anche $\mathscr{C}$.