Capitolo IV

Studio locale delle Curve

In questo capitolo introduciamo lo studio locale delle curve, in particolare intorno ai punti singolari per capirne meglio la struttura. Vi sono vari possibili approcci, e ne presenteremo due. Il primo fa uso delle trasformazioni quadratiche (del piano) di Noether, ma non sarà il nostro principale approccio.

L'altro approccio richiede invece l'introduzione come strumento algebrico delle serie formali e delle serie di Puiseux quali estensioni dei polinomi per poter capire meglio le proprietà dei polinomi stessi, e di conseguenza delle ipersuperficie che essi definiscono.

Questo secondo approccio porta in modo naturale ad alcune definizioni geometriche importanti (rami, o germogli, del piano proiettivo) che in qualche senso permettono di "parametrizzare localmente" le curve, e di rileggere e approfondire con una certa facilità problemi già affrontati finora.

-1. ♠ Trasformazioni quadratiche e ordinarizzazione delle singolarità.

-1.1. Definizione (Trasformazioni quadratiche del piano). *Le trasformazioni quadratiche di un piano proiettivo $\mathbb{P}$ sono le proiettività di $\mathbb{P}^*$ su una rete di coniche di $\mathbb{P}$ avente un ciclo base formato da tre punti.*

-1.1.1. Azione sul piano. Si osservi per inciso che le reti di curve possono non avere alcun punto base; il motivo della nostra definizione sarà chiarito da questa osservazione.

Un punto del piano è definito dal fascio di rette di centro il punto, ovvero da due qualsiasi rette distinte che gli appartengano. Ora, una trasformazione quadratica associa ad ogni retta una conica, e due tali coniche di solito si intersecano nei tre punti base più un quarto, che potremmo definire l'immagine del punto dato tramite la trasformazione quadratica. Questo vale per quasi tutti, ma non tutti, i punti del piano, il che ci impedisce di parlare di una funzione di $\mathbb{P}$ in sè (si tratta di una "corrispondenza razionale", oggetti di cui non svolgeremo una teoria completa qui). I punti per cui non vale sono quelli per cui il fascio di rette viene mandato in un fascio di coniche con infiniti punti in comune (necessariamente coniche riducibili).

I punti la cui immagine non è definita si dicono punti eccezionali (sono in corrispondenza con i punti di una retta congiungente punti base del fascio), e dualmente si dicono rette eccezionali quelle i cui punti sono in corrispondenza con un unico punto (base del fascio).

-1.1.2. Classificazione. Scegliendo opportunamente dei riferimenti sul piano e sul duale, possiamo classificare le trasformazioni quadratiche classificando le reti di coniche con tre punti base. Precisamente:

(1) se i tre punti base sono distinti, allora possiamo supporre che siano i punti fondamentali del riferimento di $\mathbb{P}$, e la rete di coniche generata dalle tre degeneri X_1X_2, X_0X_2 e X_0X_1. Allora la trasformazione quadratica si può scrivere come $\varphi\begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \xi_0X_1X_2 + \xi_1X_0X_2 + \xi_2X_0X_1$. L'azione sui punti può essere rappresentata come $\varphi\begin{pmatrix}X_0\\ X_1\\ X_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_1X_2\\ X_0X_2\\ X_0X_1\end{pmatrix}$ che si vede essere la sua propria inversa, ovunque sia definita. Sono punti eccezionali i tre punti fondamentali, e sono rette eccezionali i tre assi fondamentali.

(2) se due punti base sono distinti, allora possiamo supporre che siano i punti fondamentali impropri del riferimento di $\mathbb{P}$, con la retta $V(X_2)$ come tangente comune, e la rete di coniche generata dalle tre degeneri X_1X_2, X_0X_2 e X_0^2. Allora la trasformazione quadratica si può scrivere come $\varphi\begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \xi_0X_1X_2+\xi_1X_0X_2+\xi_2X_0^2$. L'azione sui punti può essere rappresentata come $\varphi\begin{pmatrix}X_0\\ X_1\\ X_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_1X_2\\ X_0X_2\\ X_1^2\end{pmatrix}$ che si vede avere come inversa l'applicazione quadratica $\varphi\begin{pmatrix}X_0\\ X_1\\ X_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_1X_2\\ X_0X_2\\ X_0^2\end{pmatrix}$, ovunque