4. Problemi.

4.1. Applicazioni lineari corrispondenti ai risultanti e formule associate. Se $C[T]_{<m}$ indica lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore di m con base $T^{m-1}, T^{m-2}\ldots, T, 1$ (e negli spazi prodotto la base prodotto standard), e definiamo il risultante $R_{m,n}(f,g)$ come il determinante della matrice dell'applicazione lineare

$$C[T]_{<n} \times C[T]_{<m} \longrightarrow C[T]_{<m+n}$$

che manda (ξ,η) in $\xi f+\eta g$.

Risulta che:

(1) $R_{m,n}(f+gh,g) = R_{m,n}(f,g)$ (se $\deg(h) \leqslant m-n$) (conviene considerare l'applicazione lineare (ξ,η) in $(\xi, \xi h+\eta)$),

(2) $R_{m,n+s}(f,gh) = R_{m,n}(f,g)R_{m,s}(f,h)$ (se $\deg(h) \leqslant s$), e $R_{m+r,n}(fh,g) = R_{m,n}(f,g)R_{r,n}(h,g)$ (se $\deg(h) \leqslant r$),

(3) $R_{m,n+s}(f,g) = a_0^s R_{m,n}(f,g)$ e $R_{m+r,n}(f,g) = (-)^{rn} b_0^r R_{m,n}(f,g)$.

Il risultante $R(f,g)$ che noi abbiamo definito nel testo è $R_{\deg f, \deg g}(f,g)$.

4.2. Risultanti come Norme.

4.2.1. Sia A una K-algebra di dimensione finita (come K-spazio vettoriale), $a \in A$ e definiamo $\mu_a : A \to A$ l'applicazione K-lineare "moltiplicazione per a": $\mu_a(x) = ax$. Se poniamo $N_{A/K}(a) = \det \mu_a$, otteniamo una funzione $N_{A/K} : A \to K$ (detta norma di A su K) tale che $N_{A/K}(0) = 0$, $N_{A/K}(1) = 1$ e $N_{A/K}(ab) = N_{A/K}(a)N_{A/K}(b)$.

4.2.2. Sia ora $f \in K[X]$ polinomio monico, e usiamo $A = K[X]/(f)$ (K-algebra di dimensione finita: trovare dimensione e una base). Allora $R_{m,n}(f,g) = N_{A/K}(\overline{g})$, se $m = \deg f$, $n \geqslant \deg g$ e $\overline{g}$ indica la classe di g in A.

4.3. Risultanti. Scrivere esplicitamente il risultante di due polinomi di secondo grado. Idem per un polinomio di secondo e uno di terzo grado.

Quali condizioni sono necessarie e sufficienti affinché due polinomi abbiano in comune uno zero di molteplicità fissata r?

4.4. Calcolare i risultanti delle seguenti coppie di polinomi:

4.4.1. $X^4 + pX^2 + q$, $4X^3 + 2pX$;

4.4.2. $X^6 + pX^3 + q$, $6X^5 + 3pX^2$;

4.5. Discriminanti. Quali condizioni sono necessarie e sufficienti affinché un polinomio abbia uno zero di molteplicità fissata r?

4.6. Si dimostri che $D(fg) = D(f)D(g)R(f,g)^2$. Generalizzare per $D(f_1 \cdots f_r)$.

4.7. Si calcolino i discriminanti dei seguenti polinoni:

4.7.1. $X^n - 1$;

4.7.2. $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$;

4.7.3. $X^5 + pX + q$;

4.8. Cosa si può dire di $D(f(X^r))$ conoscendo $D(f(X))$?

4.9. Curve razionali. Determinare equazioni cartesiane per le seguenti curve parametriche:

4.9.1. $\begin{cases} X = (\lambda^2+1)/\lambda^6 \\ Y = (\lambda^2+1)/\lambda^5 \end{cases}$

4.9.2. le varie espressioni razionali delle cubiche singolari viste;

4.9.3. le curve di Bézier.

4.10. Curve duali. Trovare equazioni per le duali delle curve di Fermat. Che singolarità hanno?

4.11. Intersezione. Per le seguenti coppie di curve, determinare punti singolari e relative molteplicità, punti di intersezione e relative molteplicità di intersezione:

4.11.1. $X_0X_1 - X_2^2$ e $X_0X_2^2 - X_1^2(X_0 + X_1)$;

4.11.2. $X_1^2 + X_2^2 + X_0X_1$ e $X_0^2 + 2X_1^2 + X_2^2 + 3X_0X_1$;

4.11.3. la retta impropria e il folium di Decartes;

4.11.4. la retta impropria e la parabola di Neil;