

Se  $f$  è la cubica,  $l$  la retta, e  $t_1, t_2, t_3$  le tre tangenti, usiamo  $f$ ,  $g = t_1 t_2 t_3$  e  $h = l^2 l'$  ove  $l'$  congiunge due intersezioni residue.

**3.2.3.** Come si generalizza a rette qualsiasi?

**3.2.4.** Se una retta passa per due flessi di una cubica, allora passa per un terzo flesso (è un caso particolare del precedente).

**3.2.5.** Se una conica è tangente ad una cubica in tre punti distinti, allora le tangenti alla cubica in quei punti incontrano la cubica in altri tre punti (uno per ogni retta: sono le “intersezioni residue”) che sono allineati (satellite della conica tritangente).

Generalizza il risultato precedente.

**3.2.6.** Se una conica è tangente ad una cubica in tre punti distinti, allora le intersezioni residue delle tre rette congiungenti a coppie quei punti danno tre punti (della cubica) che sono allineati.

**3.2.7.** Le tangenti ai sei punti di intersezione di una cubica e di una conica hanno intersezioni residue con la cubica in sei punti di una conica. Generalizzazioni?

**3.2.8.** I punti di contatto delle sei tangenti a una cubica liscia da un punto esterno giacciono su una conica.

**3.2.9.** I punti sestici di una cubica irriducibile sono i punti non singolari non flessi in cui una conica può avere sei intersezioni con la cubica. Mostrare che sono esattamente i punti di tangenza di tangenti dai flessi; in particolare sono 0, 3, 27 a seconda che la cubica sia cuspidale, nodale o ellittica.

**3.2.10.** Una retta che incontra una cubica di classe  $m$  in tre punti distinti, nessuno dei quali un flesso, è satellite di esattamente  $(m-2)^2$  rette distinte. Per le curve ellittiche, queste 16 rette si incontrano in quaterne in 12 punti distinti, e in ciascuna retta cadono 3 di quei punti: si tratta di una configurazione  $(12_4, 16_3)$ . Che cosa rappresenta  $(16_3, 12_4)$ ? Cosa si trova per le cubiche nodali?

**3.3.** Molte applicazioni geometriche del teorema di Noether scendono dalla seguente specializzazione: se i  $dd'$  punti intersezione di  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  sono semplici per  $\mathcal{C}'$ , e  $de$  di questi punti sono i punti di intersezione di  $\mathcal{C}$  con una curva  $\mathcal{D}$  di grado  $e < d'$ , allora i rimanenti  $d(d' - e)$  sono i punti di intersezione di  $\mathcal{C}$  con una curva  $\mathcal{D}'$  di grado  $e' = d' - e$ .

Basta applicare il teorema per avere  $\mathcal{C}' = \mathcal{E}\mathcal{C} + \mathcal{D}'\mathcal{D}$ .

**3.3.1.** Se in un fascio di curve di grado  $d$  i  $d^2$  punti base sono semplici e  $ed$  di essi cadono su una curva di grado  $e$ , allora i rimanenti  $(d-e)d$  cadono su una curva di grado  $d-e$ . È elementare?

**3.3.2.** Se due curve di grado  $d$  e  $d'$  si incontrano in  $dd'$  punti semplici, si possono scegliere  $\frac{1}{2}(e-1)(e-2)$  di questi punti che non stiano su alcuna curva di grado  $e-3$ , allora ogni curva di grado  $d+d'-e$  contenente gli altri punti contiene anche i punti scelti.

**3.4.** TEOREMA DI CHASLES. Data una proiettività tra due fasci di curve di gradi  $d$  e  $d'$  rispettivamente, aventi solo punti ordinari e cuspidi come singolarità, allora i punti dati dall'intersezione di ogni curva con la propria immagine formano una curva di grado  $d+d'$  e che passa per i punti base di entrambi i fasci.

Viceversa, se una curva di grado  $d+d'$  passa per tutti i punti base di un fascio di curve di grado  $d$ , in ciascuno con la molteplicità richiesta dal teorema di Noether, allora esiste un fascio di curve di grado  $d'$  e una proiettività tra fasci tale che la curva data ne è la curva di incidenza.

**3.4.1.** Una proiettività tra fasci di rette determina una conica.

**3.4.2.** Una proiettività tra un fascio di rette e uno di coniche determina una cubica.

**3.4.3.** Una proiettività tra fasci di coniche determina una quartica.