

Se f è la cubica, l la retta, e t_1, t_2, t_3 le tre tangenti, usiamo $f, g = t_1 t_2 t_3$ e $h = l^2 l'$ ove l' congiunge due intersezioni residue.

3.2.3. Come si generalizza a rette qualsiasi?

3.2.4. Se una retta passa per due flessi di una cubica, allora passa per un terzo flesso (è un caso particolare del precedente).

3.2.5. Se una conica è tangente ad una cubica in tre punti distinti, allora le tangenti alla cubica in quei punti incontrano la cubica in altri tre punti (uno per ogni retta: sono le “intersezioni residue”) che sono allineati (satellite della conica tritangente).

Generalizza il risultato precedente.

3.2.6. Se una conica è tangente ad una cubica in tre punti distinti, allora le intersezioni residue delle tre rette congiungenti a coppie quei punti danno tre punti (della cubica) che sono allineati.

3.2.7. Le tangenti ai sei punti di intersezione di una cubica e di una conica hanno intersezioni residue con la cubica in sei punti di una conica. Generalizzazioni?

3.2.8. I punti di contatto delle sei tangenti a una cubica liscia da un punto esterno giacciono su una conica.

3.2.9. I punti sestici di una cubica irriducibile sono i punti non singolari non flessi in cui una conica può avere sei intersezioni con la cubica. Mostrare che sono esattamente i punti di tangenza di tangenti dai flessi; in particolare sono 0, 3, 27 a seconda che la cubica sia cuspidale, nodale o ellittica.

3.2.10. Una retta che incontra una cubica di classe m in tre punti distinti, nessuno dei quali un flesso, è satellite di esattamente $(m-2)^2$ rette distinte. Per le curve ellittiche, queste 16 rette si incontrano in quaterne in 12 punti distinti, e in ciascuna retta cadono 3 di quei punti: si tratta di una configurazione $(12_4, 16_3)$. Che cosa rappresenta $(16_3, 12_4)$? Cosa si trova per le cubiche nodali?

3.3. Molte applicazioni geometriche del teorema di Noether scendono dalla seguente specializzazione: se i dd' punti intersezione di \mathcal{C} e \mathcal{C}' sono semplici per \mathcal{C}' , e ed di questi punti sono i punti di intersezione di \mathcal{C} con una curva \mathcal{D} di grado $e < d'$, allora i rimanenti $d(d' - e)$ sono i punti di intersezione di \mathcal{C} con una curva \mathcal{D}' di grado $e' = d' - e$.

Basta applicare il teorema per avere $\mathcal{C}' = \mathcal{C}\mathcal{C} + \mathcal{D}'\mathcal{D}$.

3.3.1. Se in un fascio di curve di grado d i d^2 punti base sono semplici e ed di essi cadono su una curva di grado e , allora i rimanenti $(d-e)d$ cadono su una curva di grado $d-e$. È elementare?

3.3.2. Se due curve di grado d e d' si incontrano in dd' punti semplici, si possono scegliere $\frac{1}{2}(e-1)(e-2)$ di questi punti che non stiano su alcuna curva di grado $e-3$, allora ogni curva di grado $d+d'-e$ contenente gli altri punti contiene anche i punti scelti.

3.4. TEOREMA DI CHASLES. Data una proiettività tra due fasci di curve di gradi d e d' rispettivamente, aventi solo punti ordinari e cuspidi come singolarità, allora i punti dati dall’intersezione di ogni curva con la propria immagine formano una curva di grado $d+d'$ e che passa per i punti base di entrambi i fasci.

Viceversa, se una curva di grado $d+d'$ passa per tutti i punti base di un fascio di curve di grado d , in ciascuno con la molteplicità richiesta dal teorema di Noether, allora esiste un fascio di curve di grado d' e una proiettività tra fasci tale che la curva data ne è la curva di incidenza.

3.4.1. Una proiettività tra fasci di rette determina una conica.

3.4.2. Una proiettività tra un fascio di rette e uno di coniche determina una cubica.

3.4.3. Una proiettività tra fasci di coniche determina una quartica.