3.1. Teorema (M.Noether). *Se due curve $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ di equazioni f e g si intersecano in punti che siano ordinari per $\mathscr{C}$, ordinari o singolarità ordinarie per $\mathscr{D}$, allora una curva $\mathscr{H}$ di equazione h si scrive come $h = af + bg$ (con a, b polinomi) se e solo se per ogni punto $P \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ si ha $m_P(\mathscr{C}, \mathscr{H}) \geqslant m_P(\mathscr{C}, \mathscr{D})$.*

Dimostrazione. Una implicazione è banale. Per l'altra, supponiamo scelto un riferimento proiettivo opportuno per il calcolo delle molteplicità di intersezione tramite $r = R_{X_2}(f, g)$ (in particolare $\mathscr{C}$ non contenga il punto improprio delle ordinate, e quindi il suo grado in X_2 coincida con il suo grado totale) e inoltre nessuna retta del fascio per il punto improprio delle ordinate sia dei seguenti (finiti) insiemi:
(0) rette congiungenti punti di $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$;
(0′) tangenti a $\mathscr{C}$ o $\mathscr{D}$ nei punti $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$;
(1) tangenti a $\mathscr{C}$ spiccate dai punti $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$;
(2) rette congiungenti punti di $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ con punti singolari di $\mathscr{C}$.
Allora basta mostrare che se $r = uf + vg$ (scrittura canonica del risultante) e $vh = qf + t$ (divisione euclidea, possibile perché il coefficiente di grado massimo in X_2 di f è costante; si noti che il grado di t in X_2 è strettamente minore di quello di f) allora r divide t (cioè $vh \in (f, r)$, che equivale a $h \in (f, g)$).

Osserviamo che r è una collezione (con molteplicità) di rette per il punto improprio delle ordinate, ciascuna delle quali contiene un unico punto $P \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$, sia ℓ_P, che si presenta esattamente con molteplicità $m_P = m_P(\mathscr{C}, \mathscr{D})$. Quindi $r = \prod_P l_P^{m_P}$, e basta mostrare che ogni fattore $l_P^{m_P}$ divide t.

Studiamo le molteplicità $m_Q(t, f)$ per ogni $Q \in \ell_P \cap \mathscr{C}$ (per le ipotesi fatte sul riferimento si tratta di esattamente $\deg \mathscr{C}$ punti distinti, di cui uno è P). Osserviamo in via preliminare che $m_Q(r, f) = m_Q(l_P^{m_P}, f) = m_P(f, g)$ (la retta ℓ_P non è tangente a $\mathscr{C}$). Abbiamo

$$m_Q(t, f) = m_Q(vh - qf, f) = m_Q(vh, f) = m_Q(v, f) + m_Q(h, f) \ .$$

Ora, se $Q = P$ abbiamo

$$m_P(t, f) = m_P(h, f) \geqslant m_P(f, g)$$

per ipotesi (in effetti è proprio $m_P(v, f) = 0$, anche se non ci serve); mentre se $Q \neq P$ abbiamo $Q \notin \mathscr{D}$, cioè $m_Q(g, f) = 0$, da cui $m_Q(v, f) = m_Q(vg, f) = m_Q(uf + vg, f) = m_Q(r, f) = m_P(f, g)$ e allora

$$m_Q(t, f) = m_Q(v, f) + m_Q(h, f) \geqslant m_P(f, g) \ .$$

Conclusione: per ogni $Q \in \ell_P \cap \mathscr{C}$ abbiamo $m_Q(t, f) \geqslant m_P$. Supponiamo allora che l_P^s divida esattamente t con $s < m_P$; ne segue che $t = l_P^s t'$ e $m_Q(t', f) \geqslant m_P - s > 0$, da cui $m_Q(t') > 0$ e tutti i punti $Q \in \ell_P \cap \mathscr{C}$ (che sono $\deg \mathscr{C}$ distinti) devono appartenere a t' il cui grado in X_2 è minore di $\deg \mathscr{C}$, assurdo. □

3.1.1. Si osservi che, tenuto conto che le molteplicità di intersezione sono definite come l'ordine di annullamento di opportuni risultanti, il teorema afferma che *sotto una condizione geometrica (semplicità dei punti di intersezione di g e f)* si ha che $h = af + bg$ (cioè $h \in (f, g)$) se e solo se $R_{X_2}(g, f)$ divide $R_{X_2}(g, h)$. Senza condizioni, solo l'implicazione banale è vera.

3.2. Applicazioni alla geometria delle cubiche. Per semplicità, confondiamo le curve con le loro equazioni.

3.2.1. *Se i nove punti di intersezione di due cubiche sono semplici per una delle due, allora ogni cubica passante per otto dei punti passa anche per il nono.* Si intende che i punti non sono necessariamente distinti, ma contati con le molteplicità.

Siano f, g le due cubiche date, h la terza e P il nono punto. Consideriamo una retta l per P che tagli f in altri due punti non su g. Allora lh soddisfa alle ipotesi di Noether, per cui $lh = af + bg$ (a, b sono rette). Poiché i due punti di l e f diversi da P non stanno su g, stanno su b, che quindi è βl (β scalare). Ma allora da $lh = af + \beta lg$ abbiamo che l divide af, da cui $a = \alpha l$ (α scalare) e infine $h = \alpha f + \beta g$ mostra che h appartiene al fascio generato da f e g, e dunque ne condivide tutte le intersezioni.

3.2.2. *Se una retta interseca una cubica in tre punti distinti, allora le tangenti alla cubica in quei punti incontrano la cubica in altri tre punti (uno per ogni retta: sono le "intersezioni residue") che sono allineati (satellite della retta iniziale).*