supporremo di equazione $X_2^2 = X_0X_1$. Allora essa è parametrizzata da $\begin{pmatrix}\lambda^2\\ \mu^2\\ \lambda\mu\end{pmatrix}$. Abbiamo che

$$R(f, X_2^2 - X_0X_1) = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{d-2} & a_{d-1} & a_d & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-3} & a_{d-2} & a_{d-1} & a_d\\ 1 & 0 & -X_0X_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -X_0X_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -X_0X_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -X_0X_1 \end{pmatrix}$$

e scriviamo $R(X_0, X_1)$ per indicarne la dipendenza dalla retta descritta da X_0 e X_1. Se poniamo

$$f_{2,d}(\lambda, \mu) = f_{|\mathscr{Q}} = f(\lambda^2, \mu^2, \lambda\mu) = \sum_{i=1}^{d} a_i(\lambda^2, \mu^2)\lambda^{d-i}\mu^{d-i}$$

(polinomio omogeneo in λ, μ di grado $2d$) allora risulta che $R(\lambda, \mu) = f_{2,d}(\lambda, \mu)f_{2,d}(\lambda, -\mu)$ (si osservi che la coppia $(\lambda, \pm\mu$ descrive la simmetria della conica $\mathscr{Q}$). In particolare il risultante è definito (come funzione) sulla retta $V(X_2)$ e non sulla conica $\mathscr{Q}$, mentre $f_{2,d}$ è una funzione definita sulla conica $\mathscr{Q}$ e non rispetta la simmetria, dunque non è una funzione definita sulla retta.

Vediamo alcuni casi:

$(d = 2)$ intersezione di coniche: abbiamo

$$\begin{aligned} R(X_0, X_1) &= (a_2(X_0, X_1) + X_0X_1a_0)^2 - X_0X_1a_1(X_0, X_1)^2\\ f_{2,2}(\lambda, \mu) &= a_0\lambda^2\mu^2 + a_1(\lambda^2, \mu^2)\lambda\mu + a_2(\lambda^2, \mu^2) \end{aligned}$$

$(d = 3)$ intersezione di conica e cubiche: abbiamo

$$\begin{aligned} R(X_0, X_1) &= (a_3(X_0, X_1) + X_0X_1a_1(X_0, X_1))^2 - X_0X_1(a_2(X_0, X_1) + X_0X_1a_0)^2\\ f_{2,3}(\lambda, \mu) &= a_0\lambda^3\mu^3 + a_1(\lambda^2, \mu^2)\lambda^2\mu^2 + a_2(\lambda^2, \mu^2)\lambda\mu + a_3(\lambda^2, \mu^2) \end{aligned}$$

$(d = 4)$ intersezione di conica e quartiche: abbiamo

$$\begin{aligned} R(X_0, X_1) &= (a_4(X_0, X_1) + X_0X_1a_2(X_0, X_1) + X_0^2X_1^2a_0)^2 - X_0X_1(a_3(X_0, X_1) + X_0X_1a_1(X_0, X_1))^2\\ f_{2,4}(\lambda, \mu) &= a_0\lambda^4\mu^4 + a_1(\lambda^2, \mu^2)\lambda^3\mu^3 + a_2(\lambda^2, \mu^2)\lambda^2\mu^2 + a_3(\lambda^2, \mu^2)\lambda\mu + a_4(\lambda^2, \mu^2) \end{aligned}$$

(d) caso generale: abbiamo

$$\begin{aligned} R(X_0, X_1) &= \Bigg(\sum_{d-i \text{ pari}} (X_0X_1)^{\frac{d-i}{2}} a_i(X_0, X_1)\Bigg)^2 - X_0X_1\Bigg(\sum_{d-i \text{ dispari}} (X_0X_1)^{\frac{d-i-1}{2}} a_i(X_0, X_1)\Bigg)^2\\ f_{2,d}(\lambda, \mu) &= \sum_i a_i(\lambda^2, \mu^2)(\lambda\mu)^{d-i} \end{aligned}$$

2.5.3. Intersezioni con cubiche cuspoidali $(X_2^3 - X_0X_1^2)$. Sia ora $\mathscr{S}$ una cubica cuspoidale, che supporremo di equazione $X_2^3 = X_0X_1^2$. Allora essa è parametrizzata da $\begin{pmatrix}\lambda^3\\ \mu^3\\ \lambda\mu^2\end{pmatrix}$. Se poniamo

$$f_{3,d}(\lambda, \mu) = f_{|\mathscr{S}} = f(\lambda^3, \mu^3, \lambda\mu^2) = \sum_{i=1}^{d} a_i(\lambda^3, \mu^3)(\lambda\mu^2)^{d-i}$$

(polinomio omogeneo in λ, μ di grado $3d$) e indichiamo con $R(X_0, X_1)$ il risultante $R(f, X_2^3 - X_0X_1^2)$, allora risulta che $R(\lambda^3, \mu^3) = f_{3,d}(\lambda, \mu)f_{3,d}(\lambda, \varepsilon\mu)f_{3,d}(\lambda, \varepsilon^2\mu)$ ove ε è una radice primitiva terza dell'unità (si osservi che la terna $(\lambda, \varepsilon^i\mu)$ descrive le simmetrie della cubica $\mathscr{S}$).

3. ♠ Teorema (semplice) di Noether.

Nel capitolo sullo studio locale delle curve vedremo delle versioni più potenti di un importante teorema che vogliamo qui presentare in forma semplificata sia per coglierne importanti conseguenze geometriche, sia per motivarne i (non facili) enunciati classici.