tali curve, e potremmo trovarne con due ulteriori punti su $\mathscr{C}$, proibito da Bézout), e ciascuna interseca $\mathscr{C}$ nei punti singolari, nei $d-3$ punti scelti e in un ulteriore punto (perché $\sum_{i=1}^r m_i(m_i-1)+(d-3) = d^2-2d-1 = de-1$) che parametrizza la curva.

Lo stesso risultato si può ottenere con un fascio di curve di grado $d-1$, in modo simile a quanto fatto: esplicitare il procedimento.

2.4.3. Il viceversa del risultato precedente è falso, cioè una curva può essere razionale pur essendo deficiente (vuol dire che ha deficienza positiva). Il viceversa vale in alcuni casi speciali: per esempio se le singolarità sono solo ordinarie o cuspidi ordinarie.

Controesempio: si consideri la curva di equazione $X_0^4+X_0^3X_2+X_1^2X_2^2$. Essa possiede due punti singolari nei punti fondamentali impropri, entrambi doppi (una cuspide ordinaria e un punto doppio con tangente unica d'ordine 2). Pertanto la deficienza è $(6-2-2)/2=1$ non nulla. D'altra parte la parte affine della curva si può facilmente parametrizzare intersecandola con il fascio di coniche di equazione $XY=\alpha$ (si tratta del fascio di coniche bitangente nei punti singolari alle due tangenti: ciascuna conica interseca la curva con molteplicità 3 nella cuspide e 4 nell'altro punto doppio; quindi lascia variare un ulteriore punto sulla curva...), trovando $X=-\alpha/(1+\alpha^2)$ e $Y=-(1+\alpha^2)$. Quindi si tratta di una curva razionale.

Altro controesempio: si consideri la curva di equazione $(X^2-Y)^2-Y^3$. Si tratta di una quartica con un unico punto singolare, che è un punto doppio con tangente unica d'ordine 4 all'origine (e l'unico punto improprio è un flesso). In questo caso la deficienza è $(6-2)/2=2$. Usando il fascio di coniche $(X^2-Y)+\alpha XY$ (si tratta del fascio osculatore nell'origine alla parabola, e passante per il suo punto improprio; intersecano la quartica nell'origine con molteplicità 6 e nel punto improprio semplicemente). Si vede facilmente che si ottiene $X=(\alpha^2-1)/\alpha^3$ e $Y=(\alpha^2-1)^2/\alpha^4$, da cui si vede che la curva è razionale.

2.4.4. In realtà la nozione di deficienza non è molto importante, se non perché è un invariante proiettivo facile da calcolare. Esso non caratterizza bene la geometria delle curve, visto che può avere valori diversi su curve razionali, la cui geometria evidentemente non è molto diversa da quella di una retta... Un invariante (birazionale, non solo proiettivo) molto più importante è il genere delle curve, che in questo corso non potremo introdurre per motivi di tempo e anche perché la sua introduzione in termini puramente algebrici è piuttosto difficile e poco apprezzabile; il genere si introduce in modo naturale nello studio delle superfici reali compatte, della cui classificazione è l'invariante fondamentale, per poi vederne i significati analitici, algebrici ed aritmetici nel caso delle Superficie di Riemann compatte (nozione equivalente a quella di curve algebriche proiettive complesse). Per esempio: una curva è razionale se e solo se ha genere zero.

Un altro punto di interesse della nozione di deficienza sta nel fatto che il genere coincide con la deficienza se la curva possiede solo singolarità ordinarie.

2.5. Esempi. Vogliamo vedere alcuni casi facili, ma già di un certo interesse. Sia $\mathscr{C}$ una curva di grado d e scriviamo la sua equazione $f(\underline{X})=\sum_{i=1}^d a_i(X_0,X_1)X_2^i$ ove $a_i(X_0,X_1)$ è omogenero di grado $d-i$.

2.5.1. Intersezioni con rette (X_2-X_0). Sia ora $\mathscr{L}$ una retta, che supporremo di equazione $X_2=X_0$. Allora essa è parametrizzata da $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \lambda\end{pmatrix}$. Abbiamo che

$$R(f,X_2-X_0)=\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-1} & a_d\\ 1 & -X_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -X_0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -X_0\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^d a_i(X_0,X_1)X_0^i$$

e scriviamo $R(X_0,X_1)$ per indicarne la dipendenza dalla retta descritta da X_0 e X_1. Se poniamo

$$f_{1,d}(\lambda,\mu)=f_{|\mathscr{L}}=f(\lambda,\mu,\lambda)=\sum_{i=1}^d a_i(\lambda,\mu)\lambda^{d-i}$$

allora risulta che $R(\lambda,\mu)=f_{1,d}(\lambda,\mu)$ (il risultante coincide con la sostituzione parametrica di $\mathscr{L}$ in $\mathscr{C}$).

2.5.2. Intersezioni con coniche $(X_2^2-X_0X_1)$. Sia ora $\mathscr{Q}$ una conica irriducibile, che