curva $\mathscr{C}'$ di grado $d-2$ passante per questi punti (la dimensione dello spazio proiettivo di tali cuve è $\frac{1}{2}d(d-1)-1=\frac{1}{2}(d-2)(d+1)$). Ora applichiamo il teorema di Bézout per $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$: il prodotto dei gradi è $d(d-2)=d^2-2d$, mentre la somma delle molteplicità di intersezione nei vari punti è non inferiore a $2(\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1)+(d-3)=(d-1)^2=d^2-2d+1$, il che è assurdo, a meno che $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ non abbiano una componente comune, e allora $\mathscr{C}$ deve essere riducibile.

2.3.1. Più precisamente valgono i seguenti risultati:

(1) *Se $\mathscr{C}$ è curva senza componenti multiple, allora i punti singolari soddisfano la condizione*

$$\sum_P m_P(\mathscr{C})(m_P(\mathscr{C})-1)\leqslant \deg(\mathscr{C})(\deg(\mathscr{C})-1)\ .$$

Si deduce subito dal teorema di Bézout e dalla disuguaglianza fondamentale applicata alle curve $\mathscr{C}=V(g)$ stessa e $\mathscr{C}'$ definita dalla derivata di g rispetto a X_2 (in un riferimento scelto opportunamente). Si osservi che la disuguaglianza non può essere migliorata, poiché d rette distinte di un fascio la realizzano con uguaglianza.

(2) *Se $\mathscr{C}$ è curva irriducibile, allora i punti singolari soddisfano la condizione*

$$\sum_P m_P(\mathscr{C})(m_P(\mathscr{C})-1)\leqslant (\deg(\mathscr{C})-1)(\deg(\mathscr{C})-2)\ .$$

Consideriamo una curva $\mathscr{C}'$ di grado $d'=\deg\mathscr{C}-1$ che abbia ogni punto singolare P di $\mathscr{C}$ con molteplicità $m_P-1=m_P(\mathscr{C})-1$, e che contenga ulteriori $\frac{1}{2}\big((d-1)(d+2)-\Sigma_P m_P(m_P-1)\big)$ punti semplici di $\mathscr{C}$ (la dimensione dello spazio proiettivo delle curve di grado $d'=d-1$ è $\binom{d+1}{2}-1=\frac{1}{2}(d-1)(d+2)$, e dal punto precedente sappiamo che $(d-1)(d+2)-\Sigma_P m_P(m_P-1)>0$). Allora usando disuguaglianza fondamentale e teorema di Bézout abbiamo che

$$\sum_P m_P(m_P-1)+\frac{1}{2}((d-1)(d+2)-\sum_P m_P(m_P-1))\leqslant d(d-1)$$

da cui segue $\Sigma_P m_P(m_P-1)\leqslant 2d(d-1)-(d-1)(d+2)=(d-1)(d-2)$, come si voleva (problema: dove si è usata l'irriducibilità?). Anche questa disuguaglianza è ottimale, poiché si realizza con uguaglianza per le curve irriducibili di equazioni $Y^{d-1}=X^d$.

2.3.2. Una conica irriducibile non può avere punti singolari.

2.3.3. Un cubica irriducibile può avere al più un punto singolare, al più doppio, e in tal caso è razionale.

2.3.4. Una quartica irriducibile può avere al più tre punti singolari (doppi), oppure un punto triplo. Si tratta di curve razionali?

2.3.5. Una curva irriducibile con un punto $(d-1)$-uplo non può avere altri punti singolari.

2.4. Deficienza (o difetto) di curve e razionalità. *Data una curva $\mathscr{C}$ di grado d avente $P_1,\dots,P_r$ come punti singolari di molteplicità rispettivamente $m_1,\dots,m_r$, definiamo la deficienza della curva $\mathscr{C}$ l'intero*

$$i(\mathscr{C}):=\frac{1}{2}(d-1)(d-2)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^r m_i(m_i-1)\ .$$

Si tratta di un intero non negativo, se la curva non è riducibile, ed è chiaramente invariante per proiettività.

2.4.1. Si osservi che l'irriducibilità implica difetto non negativo, quindi se la curva ha deficienza negativa essa è riducibile; ma il viceversa è falso: esistono curve riducibili con difetto nullo o positivo (per esempio una conica e una cubica aventi intersezioni semplici formano una quintica riducibile di deficienza nulla; due coniche di un fascio bitangente formano una quartica riducibile di deficienza positiva).

2.4.2. Razionalità. *Una curva irriducibile di deficienza nulla è razionale.*

Infatti: possiamo costruire un fascio di curve di grado $e=d-2$ tali che il ciclo base del fascio contenga i punti singolari P_i di $\mathscr{C}$ con molteplicità m_i-1 e ulteriori $d-3$ punti di $\mathscr{C}$. In totale abbiamo imposto $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^r m_i(m_i-1)+(d-3)=\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+(d-3)=\frac{1}{2}(d^2-d-4)$ condizioni lineari. Lo spazio delle curve di grado $d-2$ ha dimensione proiettiva $\frac{1}{2}d(d-1)-1=\frac{1}{2}(d^2-d-2)$, e la differenza dà 1. Quindi esiste un fascio di tali curve (si noti che qui è essenziale l'indipendenza delle condizioni poste: deriva dalla irriducibilità delle curva data, altrimenti ci sarebbe almeno una rete di