Di solito si esprime dicendo che due curve (proiettive piane) senza componenti comuni di gradi d e d' si incontrano in esattamente dd' punti, se questi sono contati con le opportune molteplicità.

Dimostrazione. È conseguenza immediata della definizione: ad ogni punto di intersezione abbiamo dato come molteplicità quella corrispondente ad uno zero di un polinomio omogeneo in due variabili di grado esattamente dd'. □

1.5. Teorema di Tuozèb (V.Sala). Come tutti i teoremi proiettivi, anche il teorema di Bézout si può dualizzare; conviene scriverlo in una forma che renda evidenti i termini duali:

Bézout:
Siano $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ curve piane, senza componenti comuni, di gradi d_1, d_2 (cioè d_i è il numero di punti che una generica retta del piano ha in comune con la curva $\mathscr{C}_i$). Allora genericamente $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ possiedono d_1d_2 punti in comune.
In generale, definendo come sopra $m_P(\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2)$ la molteplicità di intersezione delle curve in P, risulta che la somma delle molteplicità è pari al prodotto dei gradi delle curve (i punti di intersezione contati con opportune molteplicità sono in numero pari al prodotto dei gradi delle curve), se le curve non hanno componenti comuni; in particolare i punti comuni sono un insieme non vuoto e finito.

Tuozèb:
Siano $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ curve piane, senza componenti comuni, di classi c_1, c_2 (cioè c_i è il numero di rette che un generico punto del piano ha tangenti alla curva $\mathscr{C}_i$). Allora genericamente $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ possiedono c_1c_2 tangenti comuni.
In generale, definendo $m_t(\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2) := m_t(\mathscr{C}_1^*,\mathscr{C}_2^*)$ la molteplicità della retta t come tangente comune alle curve, risulta che la somma delle molteplicità è pari al prodotto delle classi delle curve (le tangenti comuni contate con opportune molteplicità sono in numero pari al prodotto delle classi delle curve), se le curve non hanno componenti comuni; in particolare le tangenti comuni sono un insieme non vuoto e finito.

Altro esempio di dualità:

Risulta $m_P(\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2) \geqslant m_P(\mathscr{C}_1)m_P(\mathscr{C}_2)$, e vale l'uguaglianza se e solo se le due curve non hanno tangenti comuni nel punto P.

Definendo tramite $m_t(\mathscr{C}) := m_t(\mathscr{C}^*)$ la molteplicità di t come tangente di $\mathscr{C}$, risulta $m_t(\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2) \geqslant m_t(\mathscr{C}_1)m_t(\mathscr{C}_2)$, e vale l'uguaglianza se e solo se le due curve non hanno punti di tangenza in comune nella retta t.

2. Applicazioni: flessi, classe, singolarità, deficienza.

2.1. Ancora sul numero di flessi. Abbiamo già visto che ogni curva $\mathscr{C}$ interseca la propria hessiana $\mathscr{H}$ nei punti singolari e nei punti di flesso. Se il grado di $\mathscr{C}$ è $d \geqslant 3$, quello di $\mathscr{H}$ è $3(d-2)$, e l'intersezione avrà esattamente $3d(d-2)$ punti contati con le molteplicità; togliendo il contributo all'intersezione dei punti singolari di $\mathscr{C}$, otteniamo esattamente il numero di flessi di $\mathscr{C}$, che quindi è $3d(d-2) - \sum_P m_P(\mathscr{C},\mathscr{H})$ (ove la somma è estesa ai punti singolari di $\mathscr{C}$).

A titolo di esempio, si controllino le situazioni per le cubiche singolari irriducibili. Una non difficile generalizzazione permette di dimostrare una delle formule di Plücker.

2.2. Ancora sulla classe di una curva. Abbiamo già visto che per ogni curva $\mathscr{C}$ la sua classe (ordine della curva duale) coincide con il numero di tangenti che essa possiede in un fascio di centro un generico punto. D'altra parte sappiamo che ogni curva interseca la propria prima polare rispetto ad un punto esattamente nei punti di tangenza (di rette del fascio di centro quel punto) e nei suoi punti singolari. Se il grado di $\mathscr{C}$ è $d \geqslant 3$, quello di una generica prima polare $\mathscr{C}'$ è $d-1$, e l'intersezione avrà esattamente $d(d-1)$ punti contati con le molteplicità; togliendo il contributo all'intersezione dei punti singolari di $\mathscr{C}$, otteniamo esattamente la classe di $\mathscr{C}$, che quindi è $d(d-1) - \sum_P m_P(\mathscr{C},\mathscr{C}')$ (ove la somma è estesa ai punti singolari di $\mathscr{C}$).

A titolo di esempio, si controllino le situazioni per le cubiche singolari irriducibili. Una non difficile generalizzazione permette di dimostrare l'altra delle formule di Plücker.

2.3. Stime sul numero di punti singolari. *Una curva piana irriducibile $\mathscr{C}$ di grado d può avere al più $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ punti singolari.*

Possiamo assumere $d \geqslant 4$ (fino a $d = 3$ conosciamo la classificazione proiettiva). Supponiamo che vi siano $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$ punti singolari. Scegliamo ulteriori $d-3$ punti su $\mathscr{C}$, in modo da avere in totale $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1+(d-3) = \frac{1}{2}(d-2)(d+1)$ punti su $\mathscr{C}$. Allora esiste una