1.3. Teorema (Disuguaglianza fondamentale.). *Supponiamo che $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ non abbiano componenti comuni. Per ogni punto P abbiamo allora che*

$$m_P(\mathscr{C},\mathscr{C}') \geqslant m_P(\mathscr{C})m_P(\mathscr{C}')$$

e vale l'uguaglianza se e solo se le due curve non hanno tangenti comuni in P.

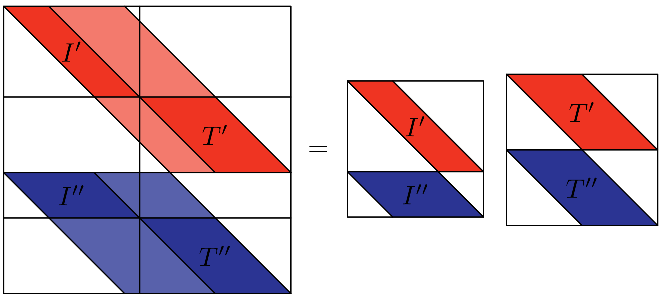
Dimostrazione. Scegliendo il riferimento in modo che (oltre a soddisfare le ipotesi della definizione) il punto P sia l'origine, possiamo usare le coordinate affini X, Y per scrivere le equazioni di $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$:

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= a_0(X)Y^d + a_1(X)Y^{d-1} + \cdots + a_{d-m}(X)Y^m + \\ &\qquad + a_{d-m+1}(X)XY^{m-1} + \cdots + a_{d-1}(X)X^{m-1}Y + a_d(X)X^m \\ g(X,Y) &= b_0(X)Y^{d'} + b_1(X)Y^{d'-1} + \cdots + b_{d'-m'}(X)Y^{m'} + \\ &\qquad + b_{d'-m'+1}(X)XY^{m'-1} + \cdots + b_{d'-1}(X)X^{m'-1}Y + b_d(X)X^{m'} \end{aligned}$$

(la divisibilità in X degli ultimi termini dipende dalla ipotesi di molteplicità per ciascuna curva del punto di intersezione: se il grado di Y è $s \leqslant m$, allora il coefficiente $a_{d-s}(X)$ corrispondente deve avere grado $\geqslant m-s$). Ora un argomento simile a quello delle dimostrazioni di isobaricità (moltiplicare le righe della matrice del risultante di f e g rispetto a Y per opportune potenze di X, e poi raccoglierle sulle colonne: l'ultima riga di f per $X^{m'-1}$, la penultima per $X^{m'-2}$, ecc., poi l'ultima riga di g per X^{m-1}, la penultima per X^{m-2}, ecc., infine raccogliendo dalle colonne le potenze ottenute: $\binom{m+m'}{2} - \binom{m}{2} - \binom{m'}{2} = mm'$) permette di scrivere

$$R_Y(f,g) = X^{mm'}R(a_i(X), b_j(X))$$

il che dimostra la disuguaglianza. La disuguaglianza risulta poi stretta se e solo se abbiamo che X divide $R(a_i(X), b_j(X))$, cioè se e solo se $R(a_i(0), b_j(0)) = 0$. Uno sviluppo globale sulle prime $d + d' - m - m'$ colonne della matrice che calcola $R(a_i(0), b_j(0))$, per cui può essere utile questo disegno:



(le zone bianche sono nulle, quelle rosse sono i coefficienti a_i, quelle blu sono i coefficienti b_j), mostra che $R(a_i(0), b_j(0)) = IT$ dove

$$I = R(a_0, \ldots, a_{d-m}, b_0, \ldots, b_{d'-m'})(0) \qquad \text{e} \qquad T = R(a_{d-m}, \ldots, a_d, b_{d'-m'}, \ldots, b_{d'})(0)\ .$$

Il termine I è il risultante delle intersezioni delle due curve con $X_1 = 0$, dunque si annulla se e solo se la retta $X_1 = 0$ è tangente nell'origine, o se in essa cadono altri punti di intersezione delle due curve (situazioni che possono essere evitate con la scelta del riferimento). Il termine T è esattamente il risultante dei due complessi tangente, dunque si annulla se e solo se i complessi tangenti delle due curve nel punto hanno un fattore comune, cioè se e solo se vi sono tangenti comuni. □

1.3.1. Punti non singolari. In particolare, se per un punto P si ha $m_P(\mathscr{C},\mathscr{C}') = 1$, allora P è punto non singolare per entrambe le curve (e le tangenti ivi alle due curve sono distinte).

1.4. Teorema (Bézout). *Date due curve piane $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ senza componenti comuni, allora la somma delle molteplicità di intersezione dei punti di intersezione è esattamente il prodotto dei gradi delle curve:*

$$\sum_{P \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'} m_P(\mathscr{C},\mathscr{C}') = \deg \mathscr{C} \deg \mathscr{C}'\ .$$