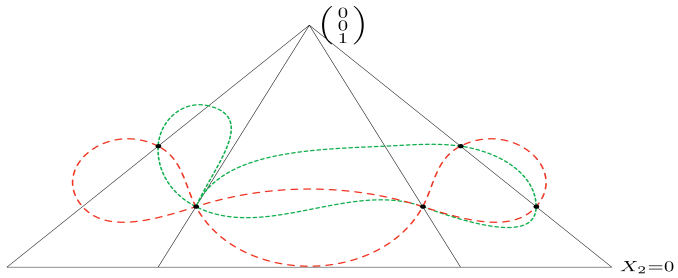
punto dell'intersezione di $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$. In ciascuna di queste (al più dd') rette può cadere solo un numero finito di punti dell'intersezione, e in numero minore o uguale alla molteplicità di $\binom{x_0}{x_1}$ come zero di $R_{X_2}(f,g)$ (perché? completare il ragionamento usando la finitezza dei punti di intersezione: cambiando riferimento possiamo fare in modo che in ogni retta cada al più un punto di intersezione...).



1.1.1. Esattamente come per le intersezioni di una retta con una curva, si vorrebbe definire per ogni punto una "molteplicità" di intersezione di due date curve tra loro (in quel punto). Questo è ovvio se una delle due curve è razionale: in queso caso basta sostituire una parametrizzazione della curva razionale nell'altra, per ottenere un polinomio omogeneo in due variabili da cui si leggono i (valori dei parametri corrispondenti ai) punti comuni con le molteplicità volute.

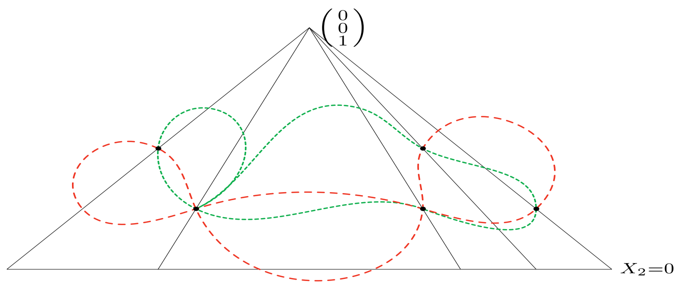
1.1.2. Un'altra definizione, simile a quella richiamata per le curve razionali, potremo dare una volta svolto lo studio locale delle curve, sfruttando parametrizzazioni locali delle curve tramite serie formali. In questo capitolo, e anche per il suo interesse intrinseco, diamo una definizione basata sulla nozione di risultante di polinomi. Tenendo conto dell'argomento svolto per dimostrare la finitezza dell'intersezione, possiamo migliorare la scelta del riferimento in modo che su ognuna delle rette prima considerate cada esattamente un solo punto dell'intersezione delle due curve.

1.2. Definizione (Molteplicità di intersezione di due curve in un punto.). *Date due curve piane $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ senza componenti comuni, scegliamo un sistema di riferimento del piano in modo che il punto $Z = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ non appartenga a nessuna delle due curve, e che nessuna retta per esso contenga più di un punto di intersezione delle due curve (di rette congiungenti punti di intersezione ve ne sono solo un numero finito). Siano f e g equazioni delle due curve rispettivamente in questo riferimento. In queste condizioni definiamo la molteplicità di intersezione $m_P(\mathscr{C},\mathscr{C}')$ delle due curve in un punto P comune come l'ordine di zero del risultante (rispetto a X_2) $R_{X_2}(f,g) \in K[X_0,X_1]$ nel punto $\pi P := V(X_2) \cap (Z \vee P)$. Cioè poniamo*

$$m_P(\mathscr{C},\mathscr{C}') := \mathrm{ord}_{\pi P} R_{X_2}(f,g)$$

(l'ordine è la molteplicità di πP come soluzione di $R_{X_2}(f,g)$).

1.2.1. La definizione non dipende dalla scelta delle coordinate, ma è un risultato molto tecnico, che non dimostreremo (ma sarà una conseguenza dello studio locale delle curve). L'idea sottostante la definizione è che la scelta del riferimento permette di "distinguere" sui punti di $V(X_2)$ i diversi contributi delle intersezioni delle due curve: a ciascun punto corrisponde una retta contenente uno solo dei punti di intersezione (possiamo anche fare in modo che tale retta non compaia tra le tangenti in quei punti, ma per il momento non ci serve):



1.2.2. Spesso il calcolo della molteplicità usando la definizione data è laborioso.