L'inconveniente usuale di questo metodo è che tende a produrre una notevole ridondanza di equazioni...

**0.7.4.** Per eliminare più variabili, è sufficiente eliminarle una per volta!

**0.8.** Prime applicazioni del risultante. Vediamo subito qualche altra applicazione elementare della nozione di risultante.

**0.8.1.** Dimostrazione diretta del lemma di Study per curve. Il lemma di Study afferma che se $g$ è polinomio irriducibile e $V(g) \subseteq V(f)$ allora $g$ divide $f$. Il viceversa è ovvio, e noi abbiamo visto il lemma si Study come conseguenza del teorema degli zeri di Hilbert. Una dimostrazione diretta nel caso delle curve si può fare usando il risultante: consideriamo $f(X,Y)$ e $g(X,Y)$ affini, e sia $r(X) = R_Y(f,g)$ il risultante rispetto a $Y$. Ora $r(X)$ ha infiniti zeri, poiché per quasi ogni $x$ (tutti tranne un numero finito) si ha che $g(x,Y)$ è di grado positivo e quindi ammette soluzioni in $Y$, e si tratta di valori $(x,y)$ che annullano anche $f$ per ipotesi (dunque soluzioni comuni per $f(x,Y)$ e $g(x,Y)$, il che annulla $r(x)$). Ma allora il risultante dev'essere identicamente nullo, da cui segue che $f$ e $g$ hanno un fattore comune, che è necessariamente $g$ (essendo irriducibile).

**0.8.2.** Determinazione delle rette d'un fascio tangenti una curva. Caratterizziamo le rette per un fissato punto $P$ del piano che siano tangenti ad una fissata curva $\mathscr{C}$. Scegliendo le coordinate in modo che $P$ sia l'origine e $\mathscr{C}$ abbia equazione $f(X,Y)$, si tratta di determinare le rette del tipo $\alpha X + \beta Y$ tali che $f(\lambda\beta, -\lambda\alpha)$ abbia almeno una radice doppia (in $\lambda$; abbiamo sostituito equazioni parametriche della retta nella curva). Questo succede se e solo se $D_\lambda(f(\lambda\beta, -\lambda\alpha)) = 0$, il che dà una condizione polinomiale su $\alpha, \beta$ genericamente di grado $\deg f(\deg f - 1)$.

**0.8.3.** Determinazione delle equazioni di curve duali. Con la nozione di risultante siamo ora in grado di determinare l'equazione della curva duale di una curva data di equazione $g(\underline{X})$. Infatti si tratta di eliminare i parametri $\underline{X}$ dalle equazioni

$$\begin{cases} X_0^* = g_0(\underline{X}) \\ X_1^* = g_1(\underline{X}) \\ X_2^* = g_2(\underline{X}) \\ \underline{X}^*\underline{X} = 0 \end{cases}$$

ove $g_i = \frac{\partial}{\partial X_i} g(\underline{X})$. Per semplificare la situazione, si possono considerare le usuali coordinate affini e il sistema diventa

$$\begin{cases} g_0^{\mathrm{a}}(X,Y)X^* = g_1^{\mathrm{a}}(X,Y) \\ g_0^{\mathrm{a}}(X,Y)Y^* = g_2^{\mathrm{a}}(X,Y) \\ 1 + XX^* + YY^* = 0 \end{cases}$$

da cui vogliamo eliminare $X$ e $Y$. Ricavando $Y$ dall'ultima equazione, sostituendo nelle altre e moltiplicando per opportune potenze di $Y^*$ possiamo ottenere un sistema

$$\begin{cases} G_0(X,X^*,Y^*)X^* = G_1(X,X^*,Y^*) \\ G_0(X,X^*,Y^*)Y^* = G_2(X,X^*,Y^*) \end{cases}$$

con due equazioni, da cui eliminare $X$ calcolandone il risultante (in questi passaggi, abbiamo introdotto fattori arbitrari?).

## 1. Teorema di Bézout.

**1.1.** Intersezione di curve prive di componenti comuni. *Date due curve piane $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ senza componenti comuni, allora l'intersezione dei supporti è non vuota e finita; più precisamente: se $d$ e $d'$ sono i gradi rispettivi, allora l'intersezione contiene al più $dd'$ punti.*

Infatti: scegliamo un riferimento tale che il punto $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ non appartenga a nessuna delle due curve, e siano $f$ e $g$ le due equazioni (omogenee). Consideriamo il risultante $R_{X_2}(f,g)$; esso non è identicamente nullo, poiché altrimenti $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ avrebbero componenti comuni, ed è polinomio omogeneo (in $X_0, X_1$) di grado $dd'$ . Si osservi ora l'aspetto geometrico del ragionamento: gli zeri del risultante identificano punti $\binom{x_0}{x_1}$ dell'asse $V(X_2)$, e sono quelli per cui sulla retta $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}x_0\\x_1\\0\end{pmatrix}$ cade qualche