definiamo

$$D(g) = D(a_i) = \prod_{i<j} (\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i) \ .$$

Allora $g(X_0, X_1)$ ha fattori multipli se e solo se $D(g) = 0$.

0.6.4. Se $g \in A[X_0]$ con $A = K[X_1, \ldots, X_r]$ è complessivamente omogeneo di grado m, allora $D(g) \in K[X_1, \ldots, X_r]$ risulta omogeneo di grado $m(m-1)$.

0.7. Teoria della eliminazione per polinomi. La nozione di risultante permette di generalizzare ai polinomi il procedimento di "eliminazione dei parametri" che si usa in geometria elementare (lineare) per passare dalle equazioni parametriche di una sottovarietà lineare alle sue equazioni cartesiane. Infatti il calcolo di un risultante "elimina" la variabile rispetto a cui è calcolato, e per questo era anche chiamato "eliminante".

Il problema generale di eliminazione è il seguente: data una famiglia di polinomi $f_i(\underline{X}, \underline{Y})$ dipendente da due set di variabili, trovare delle condizioni polinomiali $p_j(\underline{X})$ nelle $\underline{X}$ tali che l'annullamento delle $p_j(\underline{x}) = 0$ (per ogni j) sia condizione necessaria e sufficiente affinché esista un $\underline{y}$ per cui $f_i(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ (per ogni i). Un tipico caso è dato dalle equazioni parametriche di una curva razionale, oppure dal sistema che descrive una curva duale.

0.7.1. Eliminazione di una variabile da due polinomi. Il caso più semplice di applicazione del risultante è il seguente: sono dati due polinomi $f_1(\underline{T}, T), f_2(\underline{T}, T) \in K[\underline{T}][T]$ e vogliamo caratterizzare i valori di $T_1, \ldots, T_n$ tali che per qualche valore di T le due equazioni sono soddisfatte. Possiamo ragionare così:

$$\text{esistono } \underline{T},\ T \text{ tali che} \begin{cases} f_1(\underline{T}, T) = 0 \\ f_2(\underline{T}, T) = 0 \end{cases} \quad \text{sse} \quad \begin{array}{l} f_1(\underline{T}, T),\ f_2(\underline{T}, T) \in K[\underline{T}][T] \text{ hanno} \\ \text{uno zero comune in } T \text{ (in } \overline{K(\underline{T})}) \end{array}$$

$$\text{sse} \quad R_T(f_1(\underline{T}, T), f_2(\underline{T}, T)) = 0 (\in K[\underline{T}])$$

(ove il risultante è calcolato in riferimento alla variabile T) e dunque dedurre che l'annullamento di $R_T(f_1(\underline{T}, T), f_2(\underline{T}, T)) \in K[\underline{T}]$ è condizione necessaria e sufficiente affinché $\underline{T}$ soddisfi alle condizioni richieste per qualche T.

0.7.2. Equazioni cartesiane di curve razionali. Una applicazione già non banale della tecnica di eliminazione si ha per la ricerca delle equazioni di curve razionali di cui si disponga di una parametrizzazione, diciamo affine, del tipo

$$\begin{cases} T_1 = p_1(t)/q_1(t) \\ T_2 = p_2(t)/q_2(t) \ . \end{cases}$$

Possiamo infatti ragionare così: (T_1, T_2) compare nella parametrizzazione della curva se e solo se i due polinomi

$$p_1(t) - T_1 q_1(t) \qquad \text{e} \qquad p_2(t) - T_2 q_2(t)$$

hanno una soluzione in (T_1, T_2) per qualche valore del parametro t. Ma questo succede se e solo se il loro risultante rispetto a t si annulla, ovvero se e solo se (T_1, T_2) soddisfa a

$$R_t(p_1(t) - T_1 q_1(t), p_2(t) - T_2 q_2(t)) = 0 \ ,$$

che è l'equazione (polinomiale in (T_1, T_2)) cercata.

0.7.3. Eliminazione di una variabile da più polinomi. Per eliminare una variabile da più polinomi (come capita di dover fare cercando le equazioni di curve duali) si può ricorrere al metodo di Kronecker: se $f_1(\underline{T}, T), \ldots, f_r(\underline{T}, T) \in K[\underline{T}][T]$ e vogliamo caratterizzare i valori di $T_1, \ldots, T_n$ tali che per qualche valore di T le equazioni sono soddisfatte. Possiamo ragionare così:

$$\begin{array}{lll} \text{esistono } \underline{T},\ T \text{ tali che} & \text{sse} & \varphi_1 = \sum_i \lambda_i f_i(\underline{T}, T),\ \ \varphi_2 = \sum_i \mu_i f_i(\underline{T}, T) \\ f_i(\underline{T}, T) = 0 \text{ per ogni } i & & \text{in } K[\underline{T}][T][\underline{\lambda}, \underline{\mu}] \text{ si annullano per ogni } \underline{\lambda}, \underline{\mu} \end{array}$$

$$\text{sse} \quad R_T(\varphi_1, \varphi_2) = 0 (\in K[\underline{T}][\underline{\lambda}, \underline{\mu}])$$

(ove il risultante è calcolato in riferimento alla variabile T, e risulta polinomio omogeneo nelle variabili aggiuntive $\underline{\lambda}, \underline{\mu}$), il che si traduce nell'annullamento di tutti i coefficienti pensandolo come polinomio nelle $\underline{\lambda}, \underline{\mu}$ e coefficienti nell'anello $K[\underline{T}]$.