di grado m ed n. Sia $r = R_{X_0}(f,g) = uf + vg$ con $u,v \in K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$, di gradi nella X_0 minori rispettivamente di $\deg_{X_0} g$, $\deg_{X_0} f$. Vogliamo confrontare gli ideali (omogenei) (f,g), (f,r) e (g,r) (poiché $r \in (f,g)$, il primo contiene gli altri, ovviamente): risulta che $(f,g) = ((f,r) : (v)) = ((g,r) : (u))$. Esplicitamente: i seguenti fatti sono equivalenti
(1) $h \in (f,g)$, cioè $h = af + bg$;
(2) $vh \in (f,r)$, e allora $vh = qf + br$;
(2′) $uh \in (g,r)$, e allora $uh = -qg + ar$;
ove $q = av - bu$.

Infatti: basta dimostrare l'equivalenza delle prime due condizioni. La necessità è ovvia: se $h = af + bg$ allora abbiamo

$$vh = avf + bvg = avf + b(r - uf) = (av - bu)f + br \ .$$

Per la sufficienza si ragiona così: se $vh = qf + br$ allora abbiamo

$$rh = (uf + vg)h = uhf + vhg = uhf + (qf + br)g = (uh + gq)f + brg$$

da cui si deduce che r divide $uh + gq$ (perché divide gli altri due termini dell'uguaglianza) e posto $ar = uh + gq$ (nota per inciso che è (2′)) abbiamo $rh = arf + brg$ da cui $h = af + bg$, come si voleva.

0.6. Definizione-Teorema (Discriminante). *Dato un polinomio*

$$f(T) = \sum_{i=0}^{m} a_i T^{m-i} = a_0 \prod_{i=1}^{m} (T - \tau_i) \ ,$$

definiamo il discriminante

$$D(f) = D(a_i) = a_0^{2m-2} \prod_{i<j} (\tau_i - \tau_j)^2 \ .$$

Ovviamente se $a_0 \neq 0$, risulta che f ha radici multiple se e solo se $D(f) = 0$. Si tratta di un polinomio di grado $2m-2$ nelle a_i.

Dimostrazione. Indicando con f' la derivata di f rispetto a T, poiché

$$R(f,f') = a_0^{2m-1} \prod_{i\neq j} (\tau_i - \tau_j)$$

(è il termine $a_0^m \prod_i f'(\tau_i)$, come si riconosce subito) risulta l'uguaglianza

$$R(f,f') = (-)^{m(m-1)/2} a_0 D(f) \ .$$

Da questo segue che $D(f)$ è polinomio nelle a_i di grado $2m-2$. □

0.6.1. Esempi:
(1) $D(a_0T+a_1) = D(a_0,a_1) = 1$.
(2) $D(a_0T^2+a_1T+a_2) = D(a_0,a_1,a_2) = a_1^2 - 4a_0a_2$;
in particolare $D(aT^2+c) = -4ac$.
(3) $D(a_0T^3+a_1T^2+a_2T+a_3) = D(a_0,a_1,a_2,a_3) = a_1^2a_2^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_0^2a_3^2 + 18a_0a_1a_2a_3$;
in particolare $D(aT^3+pT+q) = a(-4p^3 - 27aq^2)$.
(4) $D(a_0T^4+a_1T^3+a_2T^2+a_3T+a_4) = D(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) = a_0a_1^2a_2^2a_3^2 - 4a_0a_1^3a_3^3 - 4a_0a_1^2a_2^3a_4 + 18a_0a_1^3a_2a_3a_4 - 27a_0a_1^4a_4^2 + 18a_0^2a_1a_2a_3^3 - 80a_0^2a_1a_2^2a_3a_4 - 6a_0^2a_1^2a_3^2a_4 + 144a_0^2a_1^2a_2a_4^2 - 4a_0^2a_2^3a_3^2 + 16a_0^2a_2^4a_4 - 192a_0^3a_1a_3a_4^2 - 27a_0^3a_3^4 + 144a_0^3a_2a_3^2a_4 - 128a_0^3a_2^2a_4^2 + 256a_0^4a_4^3$;
in particolare $D(aT^4+cT^2+dT+e) = a(-4c^3d^2 + 16c^4 - 27ad^4 + 144acd^2e - 128ac^2e^2 + 256a^2e^3)$.

0.6.2. Osservazione. *Un polinomio irriducibile di grado primo con la caratteristica del corpo non può avere radici multiple (in eventuali estensioni del corpo).* Altrimenti avrebbe discriminante nullo, quindi fattori comuni non banali con la sua derivata, che è non nullo di grado minore, contro l'irriducibilità.

0.6.3. Polinomi omogenei. Dato un polinomio omogeneo in due variabili

$$g(X_0,X_1) = \sum_{i=1}^{m} a_i X_0^{m-i} X_1^i = \prod_{i=1}^{m} (\alpha_i X_0 - \beta_i X_1) \ ,$$