(l'ultima colonna è combinazione delle precedenti...). Applicando questo fatto al risultante, abbiamo

$$R(f,g)=R(a_i,b_j)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 & T^{n-1}f \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & T^{n-2}f \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & & f \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & \cdots & 0 & T^{m-1}g \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & \cdots & T^{m-2}g \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & g \end{vmatrix}$$

e sviluppando rispetto all'ultima colonna otteniamo la scrittura voluta.

0.2.4. Dipendenza dagli zeri dei polinomi. Se fattorizziamo i due polinomi $f(X) = a_0\prod_{i=1}^m (X-\alpha_i)$ e $g(X) = b_0\prod_{j=1}^n (X-\beta_j)$, allora risulta

$$R(f,g) = a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j) \ .$$

Infatti il risultante, essendo isobarico come detto nei coefficienti, è omogeneo di grado mn nelle radici dei polinomi, e si annulla ogni qual volta una radice di f uguaglia una radice di g, e dunque deve essere divisibile per tutti i termini del tipo $(\alpha_i-\beta_j)$, che sono esattamente in numero di nm; la costante è (quasi) ovvia: conviene controllare che il coefficiente di $(\prod_j \beta_j)^m$ è $(-)^{mn}a_0^n b_0^m$, il che è ovvio a destra, mentre a sinistra basta raccogliere dalle righe il coefficiente $a_0^n b_0^m$ e ricordare che $b_n/b_0 = (-)^n\prod_j \beta_j$.

Infine abbiamo che

$$R(f,g) = a_0^n g(\alpha_1)\cdots g(\alpha_m) = (-)^{mn} b_0^m f(\beta_1)\cdots f(\beta_n) \ .$$

come risulta immediatamente dalla formula precedente.

0.2.5. Formule di riduzione. Utilizzando per esempio le espressioni in termini di radici di uno dei polinomi, è facile verificare queste due proprietà:
(0) $R(f,g) = (-1)^{\deg(f)\deg(g)}R(g,f)$,
(1) $R(f{+}gh,g) = (-b_0)^{\deg(f)-\deg(f+gh)}R(f,g)$ (se $\deg(h)\leqslant\deg(f)-\deg(g)$),
(2) $R(f,gh) = R(f,g)R(f,h)$, e $R(fh,g)=R(f,g)R(h,g)$.

0.3. Teorema (fondamentale del risultante). *Risulta che $R(f,g)\neq 0$ se e solo se f e g sono primi tra loro, ovvero se e solo se esistono polinomi h e k tali che $hf+kg=1$ con $\deg h<\deg g$ e $\deg k<\deg f$. Viceversa, sono condizioni equivalenti:*
(1) $R(f,g)=0$;
(2) esistono polinomi non nulli h e k tali che $hf+kg=0$ con $\deg h<\deg g$ e $\deg k<\deg f$;
(3) f e g hanno un fattore di grado positivo in comune (oppure $a_0=b_0=0$).

Dimostrazione. È quello che abbiamo visto essenzialmente prima. □

0.4. Esempi.

0.4.1. Se $f=aT+b$ allora $R(f,g)=a^n g(-\frac{b}{a}) = \sum_{j=0}^n (-)^{n-j}b_j a^j b^{n-j}$;

0.4.2. Se $f=aT^2+bT$ allora $R(f,g)=a^n g(0)g(-\frac{b}{a}) = b_n\sum_{j=0}^n (-)^{n-j}b_j a^j b^{n-j}$;

0.4.3. Se $f=aT^2+b$ allora $R(f,g)=a^n g(\sqrt{-b/a})g(-\sqrt{-b/a})$;

0.4.4. Se $f=aT^3+b$ allora $R(f,g)=a^n g(\sqrt[3]{-b/a})g(\zeta\sqrt[3]{-b/a})g(\zeta^2\sqrt[3]{-b/a})$ ove ζ è una radice cubica primitiva dell'unità.

0.5. Polinomi omogenei. Se $f(X_0,X_1), g(X_0,X_1)\in K[X_0,X_1]_{\mathrm{h}}$ sono polinomi omogenei (in due variabili), allora con l'ovvia definizione di risultante $R(f,g)=R_{\deg f,\deg g}(f^{\mathrm{a}},g^{\mathrm{a}})$ abbiamo che $R(f,g)=0$ se e solo se f e g hanno un fattore di grado positivo in comune (che è X_0 nel caso che $a_0=b_0=0$).

0.5.1. Omogeneità del risultante. Se $f,g\in A[X_0]$ con $A=C[X_1,\dots,X_r]$ sono (complessivamente nelle $X_0,X_1,\dots,X_r$) omogenei di grado m ed n, allora $R_{X_0}(f,g)\in C[X_1,\dots,X_r]$ risulta (complessivamente nelle $X_1,\dots,X_r$) omogeneo di grado mn. Infatti si tratta della isobaricità prima dimostrata del risultante rispetto ai coefficienti (rispetto a X_0) dei polinomi dati: il coefficiente di X_0^i in f (risp. g) è omogeneo nelle $X_1,\dots,X_r$ di grado $\deg f-i$ (risp. $\deg g-i$).

♠ **0.5.2.** Caratterizzazione dell'ideale (f,g) in termini del risultante. Supponiamo ora che $f,g\in A[X_0]$ con $A=C[X_1,\dots,X_r]$ siano (complessivamente nelle $X_0,X_1,\dots,X_r$) omogenei