ovvero se e solo se

$$\begin{pmatrix} h_0 & \cdots & h_{n-1} & k_0 & \cdots & k_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{m+n-1} \\ T^{m+n-2} \\ \vdots \\ T \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{m+n-2} & c_{m+n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{m+n-1} \\ T^{m+n-2} \\ \vdots \\ T \\ 1 \end{pmatrix}$$

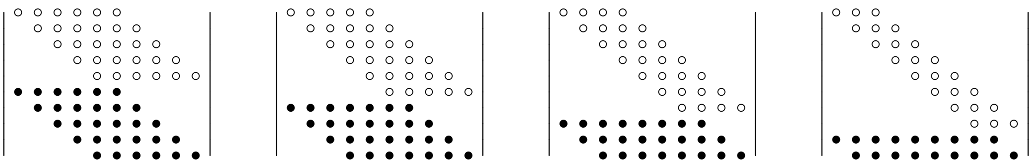
il che dà un sistema lineare che lega le h e k con le c, la cui matrice ha coefficienti tratti dai due polinomi di partenza.

0.2. Definizione (Risultante di Eulero-Sylvester). *Definiamo il risultante $R_{m,n}(f,g) = R(f,g) = R(a_i,b_j)$ di $f = \sum_{i=0}^{m} a_i T^{m-i}$ e $g = \sum_{j=0}^{n} b_j T^{n-j}$ come*

$$R(f,g) = R(a_i,b_j) = \underbrace{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix}}_{m+n \text{ colonne}} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n \text{ righe} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \text{ righe} \end{matrix}$$

che risulta ovviamente un elemento del corpo K, funzione dei coefficienti dei due polinomi.

0.2.1. Si faccia particolare attenzione a come i coefficienti dei polinomi si distribuiscono nella matrice del risultante, che sarà spesso tacitamente usato nel seguito:



(si osservi in particolare la diagonale; conviene farsi qualche esempio facile).

0.2.2. Dipendenza nei coefficienti dei polinomi. Pensato come funzione dei coefficienti di f e g, risulta che $R(a,b) \in \mathbb{Z}[a_i,b_j]$ è polinomio a coefficienti interi nelle variabili a_i e b_j. Inoltre è biomogeneo di grado n nelle a_i e di grado m nelle b_j; questo discende immediatamente dalle proprietà del determinante.

Inoltre, il risultante è isobarico di peso mn nelle a_i e b_j se si danno pesi i ad a_i e pesi j a b_j; questo significa che in ogni termine del risultante, che è un prodotto $\Pi_{\alpha=1}^{n} a_{i_\alpha} \Pi_{\beta=1}^{m} b_{j_\beta}$ si ha $\Sigma_{\alpha=1}^{n} i_\alpha + \Sigma_{\beta=1}^{m} j_\beta = mn$. Per dimostrarlo si ragiona così: consideriamo $R(a_i t^i, b_j t^j)$ e moltiplichiamo le prime n righe della matrice per t^{j-1} ($j = 1,\dots,n$) e le successive m righe della matrice per t^{i-1} ($i = 1,\dots,m$). Raccogliendo allora le potenze di t da ogni colonna, otteniamo $t^p R(a_i t^i, b_j t^j) = t^q R(a_i,b_j)$ ove $p = \binom{n}{2} + \binom{m}{2}$ e $q = \binom{m+n}{2}$, da cui $R(a_i t^i, b_j t^j) = t^{mn} R(a_i,b_j)$, come si voleva. Si osservi che il ragionamento si è svolto come se i coefficienti a_i e b_j fossero polinomi omogenei di gradi i e j rispettivamente (lo sono per esempio in quanto polinomi simmetrici negli zeri del polinomio stesso); in effetti è in questo contesto che ci interesserà il risultato.

0.2.3. Esistono polinomi $u(T)$ e $v(T)$ in $\mathbb{Z}[a_i,b_j][T]$ di grado nella T minore ad n ed m risp. tali che $R(f,g) = uf + vg$.

Viene da un procedimento di eliminazione di Gauss, oppure ragionando sulla matrice complementare di quella che dà il risultante. Un modo elegante di procedere è il seguente: per ogni $(n+1)$-upla di polinomi di grado n, siano $f_i = \sum_j a_{i,j} T^{n-j}$ ($i = 0,\dots,n$), risulta che

$$\begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n-1} & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n-1} & f_0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & f_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & f_n \end{vmatrix}$$