Capitolo III

Intersezione di Curve

Questo capitolo è dedicato ad uno studio elementare della intersezione tra curve piane. Lo strumento algebrico che si introduce e si utilizza allo scopo è quello di risultante tra due polinomi. Si tratta in effetti di una generalizzazione della nozione di discriminante di un polinomio, di cui il lettore conoscerà la definizione almeno per polinomi di grado due o tre: si tratta di una funzione (polinomiale) dei coefficienti che permette di determinare se il polinomio stesso ha zeri multipli o no. Il risultante di due polinomi permette di determinare se essi hanno zeri in comune o no. Chiaramente è un problema legato a quello di intersecare due curve, ovvero di trovare i punti le cui coordinate soddisfano ad entrambe le equazioni.

Il risultato fondamentale è il teorema di Bézout, ma come illustrazione delle nozioni e dei risultati introdotti diamo anche una prima versione di un importante teorema di Noether, e molte sue applicazioni elementari.

0. Risultanti, discriminanti ed eliminazione per polinomi.

0.1. Problema e motivazioni. Poiché $K[T]$ (una variabile) è un anello euclideo, è noto che cercare se due polinomi hanno uno zero comune equivale a cercare se l'ideale da essi generato è generato da un polinomio di grado positivo (che è il Massimo Comun Divisore), e questo equivale a cercare i polinomi d'ordine minimo scrivibili come combinazione (polinomiale) dei due dati. Per avere queste informazioni basta usare l'algoritmo di Euclide, ma questo è spesso lungo nella pratica, e di non facile utilizzo a livello teorico. Introduciamo quindi uno strumento, anch'esso classico, che si rivelerà estremamente utile.

Siano $f(T) = \sum_{i=0}^{m} a_i T^{m-i}$ e $g(T) = \sum_{j=0}^{n} b_j T^{n-j}$ due polinomi in una variabile T con $a_0 \neq 0$ o $b_0 \neq 0$. Per un polinomio $s(T) = \sum_{i=0}^{m+n-1} c_i T^{m+n-1-i}$, l'equazione $fh + gk = s$ con h e k polinomi di grado minore di n e m rispettivamente ha soluzione a seconda del rango della matrice formata dai coefficienti dei polinomi $f, Tf, \ldots, T^{n-1}f, g, Tg, \ldots, T^{m-1}g$.

Infatti il problema si riduce subito a un problema di algebra lineare sui coefficienti dei polinomi cercati $h(T) = \sum_{j=0}^{n-1} h_j T^{n-1-j}$ e $k(T) = \sum_{i=0}^{m-1} k_i T^{m-1-i}$, ovvero alla risoluzione di un sistema lineare quadrato con incognite i coefficienti di h e k, e termini noti i coefficienti del polinomio s. Abbiamo che $fh + gk = s$ se e solo se

$$\sum_{j=0}^{n-1} h_j T^{n-1-j} f(T) + \sum_{i=0}^{m-1} k_i T^{m-1-i} g(T) = \sum_{i=0}^{m+n-1} c_i T^{m+n-1-i}$$

ovvero se e solo se

$$\begin{pmatrix} h_0 & \cdots & h_{n-1} & k_0 & \cdots & k_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{n-1}f(T) \\ T^{n-2}f(T) \\ \vdots \\ Tf(T) \\ f(T) \\ T^{m-1}g(T) \\ T^{m-2}g(T) \\ \vdots \\ Tg(T) \\ g(T) \end{pmatrix} = s(T)$$