8.17. Curve di Bézier. Consideriamo $n+1$ punti del piano affine, e definiamo la curva di Bézier di quei punti come il sottinsieme del piano affine descritto parametricamente dalla seguente somma baricentrica:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i \ .$$

Si mostri che la curva passa per tutti i punti dati inizialmente. Esplicitare la curva di Bézier per $n = 2, 3, 4, 5$, e studiarne l'unico punto improprio.

8.18. Asintoti. Per una curva affine, si dicono asintoti i suoi punti impropri dotati di tangente propria: sono i punti della chiusura proiettiva della curva data che non sono affini e in cui (almeno) una tangente è propria. Determinare dei criteri per identificare gli asintoti di una curva affine in base all'equazione.

8.19. Curve euclidee associate. Data una curva nel piano euclideo, vi sono varie curve associate in modo canonico ad essa: abbiamo visto polari, hessiane, duali (nozioni proiettive); riportiamo qui altre costruzioni classiche, invitando il lettore a: trovare un procedimento per ottenere equazione (o parametrizzazione) della curva associata, nota l'equazione (o la parametrizzazione) per la curva data; chiedersi se la curva associata di una algebrica sia algebrica; chiedersi se la curva associata di una razionale sia razionale; farsi qualche esempio...

8.19.1. Evolute. Data una curva $\mathscr{C}$, l'evoluta di $\mathscr{C}$ è la curva inviluppo delle rette normali a(lle tangenti nei punti di) $\mathscr{C}$; si tratta della curva duale della curva (del piano duale) formata dalle normali alle tangenti per ogni punto di $\mathscr{C}$.

8.19.2. Involute. Data $\mathscr{C}$, si dice involuta di $\mathscr{C}$ qualunque curva la cui evoluta coincida con $\mathscr{C}$.

8.19.3. Curve pedali. Fissata una curva $\mathscr{C}$ e un punto O, si dice pedale di $\mathscr{C}$ rispetto a O la curva formata dai punti di intersezioni delle tangenti a $\mathscr{C}$ con le normali (alle tangenti) per O.

8.19.4. Curve pedali negative. Fissata una curva $\mathscr{C}$ e un punto O, si dice pedale negativa di $\mathscr{C}$ rispetto a O la curva inviluppo delle rette passanti per punti di $\mathscr{C}$ e ivi ortogonali alla congiungente con O.

8.19.5. Curve inverse. Fissata una curva $\mathscr{C}$ e una circonferenza di centro O e raggio r (possibilmente negativo), si dice curva inversa di $\mathscr{C}$ rispetto alla circonferenza data la curva formata dai punti Q del piano appartenenti a rette del tipo $O \vee P$ con $P \in \mathscr{C}$ e tali che $\|P-O\|\|Q-O\| = r^2$. Si tratta della curva ottenuta tramite la classica inversione del piano rispetto alla circonferenza scelta.

8.19.6. Caustiche. Fissata una curva $\mathscr{C}$ e un punto O (possibilmente all'infinito), si dicono caustiche di $\mathscr{C}$ rispetto ad O le curve inviluppo delle rette ottenute per riflessione (catacaustiche) o per rifrazione (diacaustiche) su $\mathscr{C}$ di rette uscenti da O.