Idem con tre punti doppi.

Idem con un punto triplo e uno doppio.

Cosa si può dire delle quartiche aventi solo nodi e cuspidi?

Studiare le famiglie di quartiche con una o due bitangenti.

8.8. Razionalità. Una quartica con tre punti doppi è necessariamente razionale (considerare un opportuno fascio di coniche)?

Dare esempi di curve di grado 4 e 5 che siano razionali, eventualmente senza punti di molteplicità 3 e 4 rispettivamente.

Studiare le singolarità della lemniscata di Bernoulli di equazione $(X^2+Y^2)^2-XY=0$; è razionale?

8.9. Polarità. Generalizzare la definizione e le proprietà delle polari al caso di ipersuperficie.

8.10. Prima polare. Data una curva affine $\mathscr{C}$ di equazione $f(X,Y)=0$, i punti della sua prima polare rispetto al punto improprio dell'asse delle ordinate sono tutti e soli i punti singolari di $\mathscr{C}$ e i punti delle curve $f(X,Y)=c$ con tangente verticale (al variare di c in K).

Generalizzazione: fissata una retta L e un suo punto P, i punti della prima polare di una curva proiettiva $\mathscr{C}$ rispetto a P sono tutti e soli i punti singolari di $\mathscr{C}$ e i punti delle curve del fascio generato da $\mathscr{C}$ e $\deg(\mathscr{C})L$ la cui tangente appartiene al fascio per P.

8.11. Polari *vs* Hessiana. Si mostri che per le cubiche abbiamo che i punti della curva hessiana sono esattamente i punti tali che danno polare degenere per la cubica.

In generale, per curve di grado qualsiasi, i punti della curva hessiana sono i punti che sono singolari per qualche polare della curva data.

In generale, cosa si può dire dell'insieme dei punti rispetto ai quali una curva data ha polare degenere (riducibile)? *Sono interessato ad eventuali risposte eleganti.*

8.12. Sistemi lineari definiti da condizioni di polarità.

8.12.1. Studiare le cubiche la cui polare rispetto ad un fissato punto sia una fissata conica.

8.12.2. Studiare le cubiche la cui polare rispetto ad un fissato punto risulti una conica degenere.

8.12.3. Studiare le quartiche la cui polare rispetto ad un fissato punto sia una fissata cubica.

8.13. Hessiane. Generalizzare la definizione e le proprietà dell'hessiano al caso di ipersuperficie.

8.14. Tangenziali. Generalizzare la definizione e le proprietà dell'inviluppo tangenziale al caso di ipersuperficie.

8.15. Parabole generalizzate. Si dicono parabole generalizzate le curve proiettive di grado d che in una opportuna scelta di un riferimento si scrivono nella forma $X_0^{d-1}X_2 = p(X_0,X_1)$, ove $p(X_0,X_1)\in K[X_0,X_1]_d$ (omogeneo di grado d), ovvero nella forma affine $Y=p(X)$ con $p(X)$ polinomio di grado d.

Si preveda lo scheletro reale della curva.

Si dimostri che una parabola generalizzata non ha punti singolari propri.

Si studino i punti impropri delle parabole generalizzate: precisamente si dimostri che c'è un unico punto improprio, che è singolare se e solo se $d\geqslant 3$, con complesso tangente supportato sulla retta impropria. Vi è differenza se d è pari o dispari? Si considerino in particolare $d=3,4$.

È vero che le parabole generalizzate sono tutte curve razionali? Che classe hanno? Quanti flessi hanno? Le curve duali sono ancora parabole generalizzate?

8.16. Curve Iperellittiche. Si dicono curve iperellittiche le curve proiettive di grado d almeno 3 che in una opportuna scelta di un riferimento si scrivono nella forma $X_0^{d-2}X_2^2 = p(X_0,X_1)$, ove $p(X_0,X_1)\in K[X_0,X_1]_d$ (omogeneo di grado d), ovvero nella forma affine $Y^2=p(X)$ con $p(X)$ polinomio di grado $d\geqslant 3$.

Si preveda lo scheletro reale della curva.

Si dimostri che l'unico punto improprio delle curve iperellittiche è singolare se e solo se $d>3$, e che in ogni caso ha come unica tangente la retta impropria. Di che tipo di singolarità si tratta? Vi è differenza se d è pari o dispari?

Si dimostri che la curva iperellittica $Y^2=p(X)$ ha punti singolari propri se e solo se il polinomio $p(X)$ ha radici multiple, e si faccia qualche esempio.

Studiare le curve polari delle iperellittiche rispetto ai tre punti fondamentali.

Cosa si può dire di classe e flessi delle iperellittiche? E delle duali delle iperellittiche?