## 8. Problemi.

**8.1.** Singolarità e Ipersuperficie.

**8.1.1.** Trovare punti singolari e coni tangente del divisore di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ definito dall'equazione $X_0^2X_1^2+X_0^2X_2^2+X_1^2X_2^2-X_0X_1X_2X_3$.

**8.1.2.** Un divisore di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ($n \geqslant 2$) contiene una varietà lineare di dimensione $r \geqslant n/2$. È vero che ha necessariamente punti singolari? E se non è un iperpiano?

**8.1.3.** Fissate due rette sghembe in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, l'insieme delle ipersuperficie di ordine tre contenenti entrambe le rette è un sistema lineare? Che dimensione ha? In tale sistema vi sono ipersuperficie singolari? Vi sono coni?

**8.1.4.** Un divisore di ordine 3 in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ è privo di punti singolari. Mostrare che non contiene piani. Mostrare che se il ciclo intersezione con un piano contiene una retta, allora la molteplicità della retta nel ciclo è uno.

**8.1.5.** Si consideri la stella di rette per un punto non singolare d'un divisore cubico di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. È vero che esistono rette contenute nel divisore, oppure il cui ciclo intersezione col divisore è il punto stesso con molteplicità tre?

**8.1.6.** Si consideri il divisore di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ($n \geqslant 2$) di equazione $\sum_{i=0}^n X_i^h$ ($h \geqslant 1$). Si mostri che non ha punti singolari, e se ne deduca che il polinomio è irriducibile.

**8.2.** Singolarità. Studiare i punti singolari delle seguenti curve; se possibile fare un disegno dello scheletro reale delle curve:

**8.2.1.** (cubica singolare) $Y^2 - X^3 + X^2$;

**8.2.2.** (quartica riducibile) $(X^2 + Y^2)^2 - X^2Y^2$;

**8.2.3.** (quadrifoglio fatto con due bifogli) $(X^4 + Y^4)^2 - X^2Y^2$;

**8.2.4.** (bifoglio) $(X^2 + Y^2)^2 - 8XY$;

**8.2.5.** (bifoglio aperto) $(X^2 - Y^2)^2 - XY$;

**8.2.6.** Intermezzo: determinare equazioni cartesiane di bifogli e quadrifogli aventi complesso tangente formato dalle due bisettrici principali.

**8.2.7.** $X^2(Y^2 + 1) - 4Y^2$;

**8.2.8.** $X^6 + Y^6 - 3X^2Y^2$;

**8.2.9.** $(X^2 + 4Y^2 - 4)(4X^2 + Y^2 - 4)$;

**8.2.10.** (tacnodo e nodo?) $2X^4 - 3X^2Y + Y^2 - 2Y^3 + Y^4$;

**8.2.11.** (ramfoide?) $X^4 + X^2Y^2 - 2X^2Y - XY^2 + Y^2$;

**8.2.12.** $X_0X_1^4 + X_0X_2^4 + X_1X_2^4$;

**8.2.13.** $X_0^2X_1^3 + X_0^2X_2^3 + X_1^2X_2^3$;

**8.3.** Ancora singolarità.

**8.3.1.** $(X_0 + X_1 + X_2)^3 + kX_0X_1X_2$;

**8.3.2.** $X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + kX_0X_1X_2$;

**8.3.3.** $X_1^2X_2+X_1X_2^2+X_0X_1^2+X_0X_2^2+X_0^2X_1+X_0^2X_2+kX_0X_1X_2$ (attenzione per $k = 2, 3, -6$);

**8.4.** È vero che per ogni $n$ esistono curve di grado $n$ non singolari?

**8.5.** Riducibilità. Una cubica con due punti singolari è riducibile; trovarne delle forme canoniche.

Una quartica con quattro punti singolari è riducibile (considerare delle coniche...).

Generalizzare?

Esistono quartiche irriducibili con i tre punti fondamentali doppi non ordinari e tangenti assegnate?

Studiare tutte le possibili singolarità di coniche, cubiche e quartiche riducibili.

**8.6.** Sistemi lineari di cubiche definiti da condizioni di singolarità. Studiare la famiglia delle cubiche con un punto doppio assegnato, identificando le sottofamiglie formate dalle cubiche nodali e quelle cuspoidali. Se non assegnamo le tangenti, si tratta di famiglie lineari? E assegnando le tangenti?

**8.7.** Sistemi lineari di quartiche definiti da condizioni di singolarità. Studiare la famiglia delle quartiche con due punti doppi assegnati, identificando le sottofamiglie corrispondenti a singolarità ordinarie. E assegnando le tangenti?