D'altra parte, sulle cubiche irriducibili di equazione $X_0X_2^2 = (X_1-\alpha_1X_0)(X_1-\alpha_2X_0)(X_1-\alpha_3X_0)$ possiamo utilizzare la costruzione geometrica (scegliere un flesso, diciamo il punto improprio delle equazioni canoniche, come elemento neutro, e dire che tre punti allineati sono di somma nulla) per determinare una legge di composizione canonica. Quando le radici $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ non sono tutte distinte, abbiamo delle cubiche singolari e l'unico punto doppio è stabile per la legge di composizione; dunque la curva che si ottiene togliendo il punto doppio possiede una legge di gruppo. Vogliamo vedere che si tratta di gruppi algebrici affini e determinare di quale struttura si tratti. Precisamente: se $\mathscr{C}$ è cubica irriducibile singolare con S punto doppio, allora $\mathscr{C} \smallsetminus \{S\}$ è gruppo algebrico affine di dimensione 1:
(1) se S è cuspide, allora $\mathscr{C} \smallsetminus \{S\}$ è isomorfo al gruppo additivo $\mathbb{G}_a$;
(2) se S è nodo, allora $\mathscr{C} \smallsetminus \{S\}$ è isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{G}_m$.

7.6.4. Cubica cuspoidale. Nel caso della cubica cuspoidale: supponiamo $\alpha_i = 0$, cosicché l'equazione diventa $X_0X_2^2 = X_1^3$, il punto singolare è $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ con tangente doppia $r = V(X_2)$. Allora nel piano affine complementare di r possiamo usare le coordinate affini $U = X_0/X_2$ e $V = X_1/X_2$ e l'equazione di $\mathscr{C} \smallsetminus \{S\}$ si scrive $U = V^3$.

Consideriamo allora la parametrizzazione $\varphi : \mathbb{A}^1(K) \to \mathscr{C} \smallsetminus \{S\}$ data da $\varphi(V) = \binom{V^3}{V}$, chiaramente biiettiva, e sia π l'inversa. Vogliamo vedere che π è un isomorfismo di gruppi. Chiaramente $\varphi(0) = \binom{0}{0}$ che sono le coordinate del punto neutro della composizione di $\mathscr{C}$. Supponiamo poi che P, Q, R siano tre punti allineati di $\mathscr{C} \smallsetminus \{S\}$ appartenenti alla retta di equazione $U + aV + b = 0$. Allora $\pi P, \pi Q, \pi R$ sono soluzioni dell'equazione $V^3 + aV + b = 0$, e poiché il termine in V^2 ha coefficiente nullo si ha che $\pi P + \pi Q + \pi R = 0$, che dimostra quanto volevamo.

7.6.5. Cubica nodale. Nel caso della cubica nodale: supponiamo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 1$, cosicché l'equazione diventa $X_0X_2^2 = X_1^3 + X_0X_1^2$, ovvero $X_0(X_2 + X_1)(X_2 - X_1) = X_1^3$; il punto singolare è $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ con tangenti $r_\pm = V(X_2 \pm X_1)$. Come prima dobbiamo scegliere un riferimento affine che escluda solo il punto singolare: usiamo il piano affine complementare di $r = V(X_2 + X_1)$ e le coordinate affini $U = 8X_0/(X_2 + X_1)$ e $V = (X_2 - X_1)/(X_2 + X_1)$ (l'8 compare per motivi estetici). L'equazione di $\mathscr{C} \smallsetminus \{S\}$ si scrive $UV = (1 - V)^3$.

Consideriamo allora la parametrizzazione $\varphi : \mathbb{A}^1(K) \smallsetminus \{0\} \to \mathscr{C} \smallsetminus \{S\}$ data da $\varphi(V) = \binom{(1-V)^3/V}{V}$, chiaramente biiettiva, e sia π l'inversa. Vogliamo vedere che π è un isomorfismo di gruppi. Chiaramente $\varphi(1) = \binom{0}{1}$ che sono le coordinate del punto neutro della composizione di $\mathscr{C}$. Supponiamo poi che P, Q, R siano tre punti allineati di $\mathscr{C} \smallsetminus \{S\}$ appartenenti alla retta di equazione $U + aV + b = 0$. Allora $\pi P, \pi Q, \pi R$ sono soluzioni dell'equazione $(1 - V)^3 + V(aV + b) = 0$, e poiché il termine noto è -1 si ha che $\pi(P)\pi(Q)\pi(R) = 1$, che dimostra quanto volevamo.

7.7. Polarità. Abbiamo già visto cosa succede della polarità per le cubiche irriducibili singolari; vediamo invece per le curve ellittiche nella forma di Weierstrass. Se $X_0X_2^2 = 4X_1^3 - g_2X_0^2X_1 - g_3X_0^3$ è l'equazione, allora le curve polari sono le coniche della rete $q_0(3g_3X_0^2 + 2g_2X_0X_1 + X_2^2) + q_1(g_2X_0^2 - 12X_1^2) + q_2(2X_0X_2)$ cioè di matrici $q_0\left(\begin{smallmatrix}3g_3&g_2&0\\g_2&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right) + q_1\left(\begin{smallmatrix}g_2&0&0\\0&-12&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right) + q_2\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)$ al variare di $Q = \left(\begin{smallmatrix}q_0\\q_1\\q_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{P}^2(K)$. In particolare si nota che:
(1) La polare rispetto al punto di flesso $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ è degenere e le due rette intersecano la cubica nel flesso stesso (con molteplicità 3) e nei tre punti della cubica sull'ascissa (punti a tangente verticale, cioè passante per il nostro flesso);
(2) La polare rispetto al punto $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ è degenere e le due rette intersecano la cubica nel suo punto improprio (ciascuna con molteplicità 1) e in quattro punti affini (punti a tangente orizzontale);
(3) La polare rispetto all'origine è una parabola non degenere che interseca la curva in sei punti affini (in cui la tangente alla cubica passa per l'origine).

Inoltre i punti del piano per cui la polare è degenere sono tutti e soli i punti di una cubica contenente i flessi della nostra, la cui equazione si ottiene dal determinante della matrice della rete di coniche.

7.7.1. Per esercizio, analizzare la polarità per il fascio di cubiche di Hasse.