7.5.3. Definizione-Teorema (struttura di gruppo su una cubica liscia, Poincaré). *Sia $\mathscr{C}$ una cubica liscia e O un suo punto; allora la legge di composizione $\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ ($(P,Q)\mapsto P+Q$) sopra descritta dà all'insieme dei punti di $\mathscr{C}$ una struttura di gruppo abeliano con elemento neutro O e inverso di P dato da $-P := P*(O*O)$.*

Se si sceglie O' diverso da O, e si indica con $+'$ l'operazione definita usando O', la relazione tra le due strutture di gruppo è data da $P+'Q = P+Q-O'$. Le due strutture di gruppo sono quindi isomorfe: la posizione $P\mapsto P-O' = P+'O$ determina un isomorfismo di gruppi $(\mathscr{C},+')\to(\mathscr{C},+)$ con inverso dato da $P\mapsto P-'O = P+O'$.

Dimostrazione. Dalla costruzione è chiaro che la legge di composizione è commutativa, con elemento neutro O, e che ogni punto P ammette come opposto $P*(O*O)$ (essendo P, $O*O$ e $P*(O*O)$ allineati, si ha che $P*(P*(O*O)) = O*O$, e quindi $P+(P*(O*O)) = O$, visto che $O*O$ è il terzo punto di $\mathscr{C}$ sulla tangente in O).

Per concludere basta mostrare l'associatività, che è la parte più delicata; lo faremo con una costruzione che è un caso particolare di quella di Berzolari. Supponiamo per comodità che i punti che entrano nella costruzione siano distinti; dobbiamo mostrare che $(P+Q)+R = P+(Q+R)$ e per questo basta mostrare che $(P+Q)*R = P*(Q+R)$. Consideriamo allora le seguenti due terne di rette che entrano nella costruzione dei due risultati:

$$\begin{array}{ll} l\ni P,Q,P*Q & l'\ni Q,R,Q*R \\ m\ni O,P*Q,P+Q & m'\ni O,Q*R,Q+R \\ n\ni P+Q,R,(P+Q)*R & n'\ni Q+R,P,P*(Q+R) \end{array}$$

e consideriamo il fascio di cubiche generato da $\mathscr{C}$ e dalla cubica $\mathscr{D}$ spezzata nelle tre rette l,m',n. Il ciclo base del fascio è dunque costituito dai nove punti

$$P,Q,P*Q,O,Q*R,Q+R,P+Q,R,(P+Q)*R$$

e possiamo determinare la cubica $\mathscr{D}'$ del fascio che contiene come componente la retta l' (basta infatti imporre il passaggio per un quarto punto di l', oltre ai punti $Q,R,Q*R$ che sono del ciclo base). Allora $\mathscr{D}'$ si riduce a l' e ad una conica $\mathscr{Q}$ che deve contenere gli altri sei punti $P,P*Q,O,Q+R,P+Q,(P+Q)*R$ del ciclo base; ma allora contiene la retta m (perché ne contiene i tre punti $O,P*Q,P+Q$) e di conseguenza $\mathscr{Q}$ si riduce a m' e una ulteriore retta che necessariamente contiene i tre punti rimanenti del ciclo base, cioè $P,Q+R,(P+Q)*R$. Ma la retta che unisce P e $Q+R$ è esattamente n', e il suo terzo punto su $\mathscr{C}$ è $P*(Q+R)$, che quindi coincide con $(P+Q)*R$, come si voleva.

Per la scelta del punto neutro, basta osservare che $O*(P*Q) = O*(O'*(O'*(P*Q)))$ da un lato dà $P+Q$, dall'altro dà $O'+(P+'Q)$. □

7.5.4. Nota su $*$. Può essere interessante studiare di per sè l'operazione $*$ (terzo punto sulla curva allineato con i due dati). Alcune proprietà sono le seguenti: $P*Q = Q*P$ (commutativa), $P*(P*Q) = Q$ (ne segue che $Q=R$ sse $P*Q = P*R$), $R = P*Q$ sse $P = R*Q$ sse $Q = P*R$, $P*(A*(B*Q)) = Q*(A*(B*P))$ (cioè la mappa $(P,Q)\mapsto P*(A*(B*Q))$ è commutativa)...

7.5.5. Nota. In effetti nella dimostrazione abbiamo mostrato che la cubica $\mathscr{D}'$ si spezza nella tre rette l',m,n': e allora $(P+Q)*R = P*(Q+R)$ viene da che si tratta del nono punto del ciclo intersezione del fascio di cubiche contenente $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ e $\mathscr{D}'$. Questo ragionamento si può fare direttamente, una volta noto che gli otto punti

$$P,Q,P*Q,O,Q*R,Q+R,P+Q,R$$

sono in posizione generale, e quindi determinano un fascio di cubiche cui appartengono $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ e $\mathscr{D}'$. Che i punti siano in posizione generale è un caso speciale della costruzione di Berzolari. Visto che ho fatto la figura, la inserisco qui di lato.