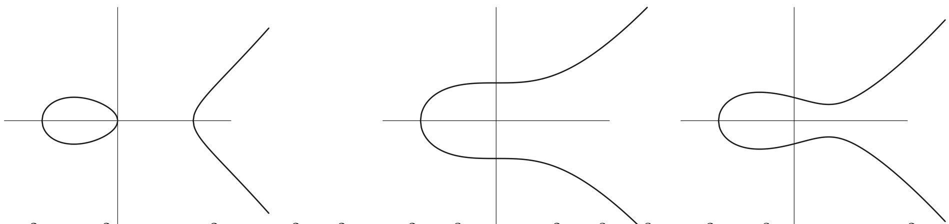
Si osservi che le coppie (g_2, g_3) e $(\lambda^3 g_2, \lambda^2 g_3)$ danno luogo allo stesso modulo, e dunque a due curve ellittiche proiettivamente equivalenti; questo conferma che le classi di equivalenza proiettiva di curve ellittiche dipendono essenzialmente da un solo parametro.

Osservazione: quindi possiamo dire che le classi di equivalenza proiettiva di curve ellittiche (insieme quoziente di un $\mathbb{P}^9$ sotto l'azione delle proiettività del piano sulle coordinate delle curve ellittiche) sono, a parte quelle riducibili: una per le curve nodali, una per le curve cuspoidali, e una collezione indiciata da $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0,1\}$ modulo la relazione indotta dal gruppo finito (Klein) sulle permutazioni del birapporto. Per la classificazione proiettiva delle coniche bastava un numero finito di classi.

7.2.5. Cubiche non singolari. Aspetti possibili di curve nella forma di Weierstrass:



$Y^2=X(X^2-1)$, $X_0X_2^2=X_1(X_1^2-X_0^2)$ $Y^2=X^3+1$, $X_0X_2^2=X_1^3+X_0^3$ $Y^2=4X^3-2X+2$, $X_0X_2^2=4X_1^3-2X_1X_0^2+2X_0^3$

7.3. Razionalità. Abbiamo già visto che le cubiche irriducibili singolari, avendo un punto doppio, sono razionali, e ne avevamo anche già scritto delle parametrizzazioni per le forme canoniche: il lettore le ritrovi. Per contro vedremo che le curve ellittiche non sono razionali, essendo non singolari e di deficienza positiva (1, che coincide in questo caso con il genere).

A livello più elementare, si può tentare il seguente argomento: se una curva piana è razionale e di grado maggiore di 2, allora possiede almeno un punto singolare; in particolare curve piane lisce (cioè senza punti singolari) non possono essere razionali, se non sono rette o coniche. Infatti, e senza usare il teorema di Bézout nel caso delle cubiche, si osserva subito che per una curva razionale di grado d, la duale ammette una parametrizzazione di grado non superiore a $2d-1$ (si controlli il prodotto vettore), mentre dovrebbe essere di grado $d(d-1)$ nel caso di curve lisce; ora $d(d-1) \leqslant 2d-1$ solo per gradi $d = 1, 2$.

7.4. Configurazione dei flessi sulle cubiche irriducibili.

7.4.1. Folium di Decartes. La cubica nodale contiene tre flessi, che sono allineati.

7.4.2. Parabola di Neil. La cubica cuspoidale contiene un solo flesso.

7.4.3. Cubica non singolare. Una cubica non singolare ha nove flessi (e la retta per due qualsiasi flessi ne contiene un terzo). Quindi per ognuno dei nove flessi passano quattro rette che uniscono flessi, e in ognuna delle 12 rette che uniscono flessi cadono 3 flessi.

7.4.4. Problema. L'allineamento di un terzo flesso con due dati si vede chiaramente nelle forme canoniche. Provare una dimostrazione diretta usando la seguente strategia: scegliamo un riferimento in cui due flessi siano punti fondamentali, e il terzo punto fondamentale sia l'intersezione delle loro tangenti. Se il terzo punto della curva sulla retta per i due flessi usati viene usato come punto unità di quella retta, ne risulta per la cubica un'equazione del tipo $X_2^3 + X_0X_1^2 - X_0^2X_1 + \beta X_0X_1X_2 = 0$ e della retta tangente $X_0 = X_1 + \beta X_2$ nel terzo punto si riconosce subito essere di flesso...

Curiosità: come si dispongono le tre tangenti di tre flessi allineati? Sono concorrenti in un punto o no? Forme canoniche associate a queste situazioni?

7.4.5. Nota sulle configurazioni di punti e rette. In generale si dice configurazione di punti e rette sul piano proiettivo una collezione di l rette e di p punti tali che ogni retta contiene lo stesso numero di punti, e ogni punto appartiene allo stesso numero di rette. Se ad ogni retta appartengono λ di quei punti e per ogni punto passano π di quelle rette, allora la configurazione si rappresenta con il simbolo (p_π, l_λ). Chiaramente abbiamo $l\lambda = p\pi$, $\pi \leqslant l$, $\lambda \leqslant p$. Conosciamo già alcuni esempi:

(0) configurazione banali: $(n_1, 1_n)$ parla di n punti allineati e $(1_n, n_1)$ parla di n rette d'un fascio; di conseguenza anche (m_n, mn_1) e (mn_1, m_n) sono configurazioni banali;

(1) configurazione del triangolo: $(3_2, 3_2)$;