(3) Supponiamo ora che non vi sia alcuna singolarità; sappiamo comunque che vi è almeno un punto di flesso, e scegliamo il riferimento proiettivo in modo che uno dei flessi sia $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ con tangente la retta impropria (Y_0). Allora l'equazione è del tipo

$$gY_1^3 + Y_0(aY_0^2 + bY_0Y_1 + cY_0Y_2 + dY_1^2 + eY_1Y_2 + fY_2^2)$$

visto che gli altri termini sono annullati dalla condizione di flesso posta (si controlli sul triangolo dei monomi cubici); i coefficienti f e g non nulli (perché?). Completando il quadrato di Y_2 otteniamo

$$gY_1^3 + Y_0(f(Y_2 + c'Y_0 + e'Y_1)^2 + a'Y_0^2 + b'Y_0Y_1 + d'Y_1^2)$$

e ponendo $X_2 = \sqrt{f}(Y_2 + c'Y_0 + e'Y_1)$ otteniamo l'espressione

$$Y_0X_2^2 + gY_1^3 + a'Y_0^3 + b'Y_0^2Y_1 + d'Y_0Y_1^2$$

dalla quale è facile ottenere entrambe le forme canoniche usando $X_0 = Y_0$ e X_1 una combinazione lineare di Y_0 e Y_1. Un facile conto permette poi di determinare le condizioni affinché le forme canoniche non siano singolari. □

7.2.1. Si osservi che le forme irriducibili singolari si ottengono dalla forma $X_0X_2^2{=}G(X_0, X_1)$ ove $G(X_0, X_1)$ è polinomio omogeneo di terzo grado con radici multiple (due, una doppia, oppure una tripla).

7.2.2. Problema: fascio di Hasse. Consideriamo il fascio di cubiche definito dalle equazioni $X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 = \mu X_0X_1X_2$ con $\mu \in K$.

Determinare tutte le cubiche singolari del fascio (sono riducibili?).

Determinare le hessiane delle cubiche del fascio, mostrando che il fascio di Hasse e' stabile per hessiane; quindi i flessi delle curve non singolari di Hasse sono esattamente i punti del ciclo base del fascio: determinarli.

Mostrare che le cubiche passanti per i nove punti $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\\omega\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\\omega\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\\omega\\0\end{smallmatrix}\right)$, con $\omega^3 = -1$ formano il fascio di Hasse (e quindi i punti sono automaticamente flessi?).

È vero che ogni cubica non singolare è proiettivamente equivalente a una nella forma di Hasse $X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 = \mu X_0X_1X_2$ con $\mu \in K$?

7.2.3. Perché si chiamano curve ellittiche? Un problema non banale della Matematica è il calcolo di integrali (e per quelli indefiniti, se si possano esprimere tramite funzioni elementari). In particolare il calcolo della lunghezza d'arco di una ellisse in forma canonica $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ porta all'integrale

$$\frac{1}{a}\int \frac{a^4 + (b^2 - a^2)X^2}{\sqrt{(a^2 - X^2)(a^4 + (b^2 - a^2)X^2)}}dX$$

che ha integrando della forma $R(X, w(X))$ ove $R(X, Y)$ è una funzione razionale, e $w(X)$ è una funzione continua che soddisfa ad una equazione polinomiale (qui $w(X)^2$ è polinomiale).

Ora, alcuni di questi integrali ammettono delle sostituzioni che permettono una integrazione indefinita con primitive elementari, altri no. Perché? Essenzialmente questo dipende da che la curva algebrica definita da $w(X)$ sia razionale (e allora si ottiene un integrale elementare) oppure no (e allora l'integrale non potrà esprimersi tramite funzioni elementari). Nel caso specifico la curva $Y^2 = (a^2 - X^2)(a^4 + (b^2 - a^2)X^2)$ non è una curva ellittica (è di quarto grado), ma è di genere 1, e la sua geometria è molto vicina a quella delle curve ellittiche. In particolare ci dice che non sarà possibile ottenere una primitiva con funzioni elementari.

7.2.4. Moduli di Curve Ellittiche. Due cubiche lisce nella forma di Legendre sono isomorfe se e solo se i parametri λ hanno lo stesso invariante $J(\lambda)$, che si dice il modulo della cubica non singolare. Si osservi che il parametro λ rappresenta uno dei birapporti possibili per le quattro rette del fascio per il punto di flesso $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ e tangenti alla cubica; il parametro $J(\lambda)$ dà quindi di un invariante proiettivo, poiché le proiettività rispettano flessi e tangenti.

Più in generale, siccome una curva ellittica ha classe 6, per ogni punto della curva passano 4 tangenti ad (altri, di solito) punti della curva stessa, a parte la tangente stessa in quel punto (contata due volte): il birapporto di queste quattro rette dipende dalla curva, e non dal punto scelto...

In termini della forma normale di Weierstrass, il modulo si scrive come $\frac{27}{4}\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$. Infatti, detti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gli zeri di $4X_1^3 - g_2X_0^2X_1 - g_3X_0^3$, abbiamo $g_3/4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $g_2/4 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$ e $\lambda = \frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_3}$ da cui ...