7. Classificazione e geometria delle Cubiche.

7.1. Una cubica è una curva di grado 3 di $\mathbb{P}^2(K)$. L'insieme delle cubiche forma uno spazio proiettivo di dimensione nove.

7.1.1. Riducibilità. Le cubiche riducibili senza componenti multiple possono presentarsi in più forme:

(1) tre rette d'un fascio (se e solo se la cubica possiede un punto triplo);

(2) una conica ed una retta non tangente alla conica (se e solo se ha almeno due punti doppi; tre se la conica è degenere);

(3) una conica irriducibile ed una sua retta tangente (se e solo se ha un unico punto doppio, e in tal caso l'unica tangente ivi è componente della cubica).

7.2. Teorema (classificazione proiettiva di cubiche irriducibili). *Le cubiche irriducibili del piano proiettivo si classificano a meno di proiettività in tre classi:*

(1) Cubica nodale, o Folium di Decartes *se possiede un unico punto doppio ordinario (cioè a tangenti distinte); in tal caso a meno di una trasformazione proiettiva di coordinate l'equazione si può scrivere nella forma $X_0X_1X_2{=}X_1^3{+}X_2^3$ (il nodo è nell'origine e le tangenti sono $V(X_1)$ e $V(X_2)$), oppure $X_0X_2^2{=}X_1^3{+}X_0X_1^2$ (il nodo è nell'origine e le tangenti sono $V(X_1 \pm X_2)$).*

(2) Cubica cuspoidale, o Parabola di Neil *se possiede un unico punto doppio non ordinario (cioè a tangenti coincidenti); in tal caso a meno di una trasformazione proiettiva di coordinate l'equazione si può scrivere nella forma $X_0X_2^2{=}X_1^3$ (la cuspide è nell'origine e la tangente è $V(X_2)$).*

(3) Cubica liscia, o non singolare o curva ellittica: *a meno di una trasformazione proiettiva di coordinate le uniche cubiche non singolari ammettono equazioni del tipo $X_0X_2^2{=}G(X_0,X_1)$ ove $G(X_0,X_1)$ è polinomio omogeneo di terzo grado con radici distinte; sono classiche:*

le forme di Weierstrass $X_0X_2^2 = 4X_1^3 - g_2X_0^2X_1 - g_3X_0^3$ con $g_2, g_3 \in K$ e $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$;

le forme di Legendre $X_0X_2^2 = X_1(X_1 - X_0)(X_1 - \lambda X_0)$ con $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0, 1$.

Dimostrazione.

(1) Supponiamo che l'unico punto singolare abbia tangenti distinte, e scegliamo il riferimento in modo che il punto sia l'origine, e le due tangenti i due assi coordinati per l'origine. Allora l'equazione è del tipo

$$Y_0Y_1Y_2 + \alpha Y_1^3 + \beta Y_1^2Y_2 + \gamma Y_1Y_2^2 + \delta Y_2^3$$

visto che gli altri termini sono annullati dalla singolarità e dal complesso tangente imposto (si controlli sul triangolo dei monomi cubici). Ponendo $Y_0 = X_0 - \beta Y_1 - \gamma Y_2$ risulta

$$X_0Y_1Y_2 + \alpha Y_1^3 + \delta Y_2^3$$

e normalizzando $X_1 = \sqrt[3]{\alpha}Y_1$, $X_2 = \sqrt[3]{\gamma}Y_2$ otteniamo la forma

$$X_0X_1X_2 + X_1^3 + X_2^3\ .$$

Quindi esiste una sola classe a meno di proiettività per cubiche nodali. Come ottenere l'altra forma segnalata?

(2) Supponiamo che l'unico punto singolare abbia unica tangente doppia, e scegliamo il riferimento in modo che il punto sia l'origine, e il complesso tangente abbia supporto sull'asse delle ascisse (Y_2^2). Allora l'equazione è del tipo

$$Y_0Y_2^2 + \alpha Y_1^3 + \beta Y_1^2Y_2 + \gamma Y_1Y_2^2 + \delta Y_2^3$$

visto che gli altri termini sono annullati dalla singolarità e dal complesso tangente imposto (si controlli sul triangolo dei monomi cubici). Completando il cubo di Y_1 possiamo ottenere la forma

$$Y_0Y_2^2 + \alpha(Y_1 + bY_2)^3 + cY_1Y_2^2 + dY_2^3$$

e ponendo $Y_0 = X_0 - cY_1 - dY_2$, poi $X_1 = \sqrt[3]{\alpha}(Y_1 + bY_2)$ e $X_2 = Y_2$ otteniamo la forma

$$X_0X_2^2 + X_1^3\ .$$

Quindi esiste una sola classe a meno di proiettività per cubiche cuspoidali.