(2) se il punto non appartiene alla conica, la polare interseca la conica nei due punti in cui le tangenti alla conica per il punto intersecano la conica stessa.

6.3.1. Armonie, involuzioni e polarità di una conica. Dovrebbe già essere chiaro al lettore che vi sono corrispondenze canoniche tra i seguenti insiemi:

(1) quaterne armoniche di punti su una conica;
(2) involuzioni di una conica (proiettività non identiche di quadrato identico della conica in sè);
(3) omologie involutorie del piano in sé che fissano la conica;
(4) rette del piano non tangenti alla conica.

Il quarto punto ha a che fare con la polarità: su ogni retta non tangente alla conica, la polarità definisce una involuzione con punti fissi quelli di intersezione con la conica...

6.4. Dualità, Generazione di Stein. La curva duale di una conica non degenere è una conica non degenere; dunque la dualità del piano si estende alle coniche dicendo che il duale di una conica (punteggiata) è una conica (rigata). Abbiamo già visto come il teorema mistico di Pascal si dualizza nel teorema di Brianchon.

Dualizziamo per esempio la costruzione di una conica tramite proiettività tra fasci di rette:

Se $\varphi : P^* \to Q^*$ è proiettività tra due fasci di rette, allora l'insieme delle intersezioni $p \cap \varphi(p)$ $(p \in P^*)$ descrive una conica che risulta degenere se solo se $\varphi(P \vee Q) = P \vee Q$.	Se $\varphi : p \to q$ è proiettività tra due rette, allora l'insieme delle congiungenti $P \vee \varphi(P)$ $(P \in p)$ descrive una conica inviluppo che risulta degenere se solo se $\varphi(p \cap q) = p \cap q$.

6.5. Fasci di coniche. I fasci di coniche sono le rette nello spazio proiettivo delle coniche. Sappiamo che i fasci non degeneri (cioè in cui non tutte le coniche sono degeneri) si classificano utilizzando i punti base (loro molteplicità e tangenti) in cinque tipi:

(1) fasci ordinari: quattro punti base distinti, ciclo base $A+B+C+D$, tre coniche degeneri;
(2) fasci tangenti: tre punti base disitinti, uno doppio: ciclo base $2A+B+C$ con tangente assegnata a in A, due coniche degeneri;
(3) fasci bitangenti: due punti base disitinti, entrambi doppi: ciclo base $2A+2B$ con tangenti assegnate a in A e b in B, due coniche degeneri;
(4) fasci osculatori: due punti base disitinti, uno triplo: ciclo base $3A+B$, passante per una fissata conica non degenere $\mathscr{A}$ in A, una sola conica degenere;
(5) fasci iperosculatori: un solo punto base necessariamente quadruplo: ciclo base $4A$, passante per una fissata conica non degenere $\mathscr{A}$ in A, una sola conica degenere.

6.5.1. Condizioni di polarità. La condizione che un fissato punto abbia una fissata polare è una condizione lineare doppia; aggiungendo due condizioni lineari indipendenti si ottiene un fascio: di che tipo di fasci si tratta?

6.5.2. La condizione di passaggio per un dato punto (senza fissare la tangente) è una condizione lineare semplice sulle coniche; tuttavia la condizione duale (avere una data retta come tangente, senza prefissare il punto di tangenza) non lo è. Come si spiega questo fatto?

Si cerchi di capire il rapporto tra fasci di coniche punteggiate e fasci di coniche rigate.

6.6. Problema. Per ogni tipo di fascio di coniche, si studi quali sono i punti del piano la cui polare sia costante rispetto a tutte le coniche del fascio; si determini quali fasci ammettono un triangolo autopolare, e dunque una forma diagonale simultanea per tutte le coniche del fascio.

6.7. Problema. Fissata una retta del piano proiettivo come retta impropria, e detto centro di una conica il polo di tale retta, studiare il luogo dei centri per i vari tipi di fasci di coniche.

6.8. Conica dei nove punti. Dato un quadrangolo piano completo nel piano affine (i quattro vertici siano punti affini), si considerino i (sei) punti medi dei lati e i (tre) punti diagonali; allora esiste una conica passante per quei nove punti (dov'è il centro?). Si tratta della conica dei centri delle coniche del fascio per i quattro punti base del quadrangolo...