



6. Classificazione e geometria delle Coniche.

6.1. Una conica è una curva di grado 2 di $\mathbb{P}^2(K)$. L'insieme delle coniche forma uno spazio proiettivo di dimensione cinque.

6.1.1. RIDUCIBILITÀ. Una conica è riducibile se e solo se è singolare; in tal caso può avere un punto doppio (allora è unione di due rette distinte del fascio per quel punto) oppure avere tutti i suoi punti come punti doppi.

Altrimenti detto, una conica è irriducibile se e solo se è non singolare.

6.2. RAZIONALITÀ. Una conica irriducibile è sempre razionale. Tutte le sue parametrizzazioni si ottengono scegliendo un punto P della conica e associando ad ogni retta L del fascio per P il punto dato da $\mathcal{C} \cdot L - P$. Dualmente le parametrizzazioni si ottengono fissando una retta T tangente (in P a \mathcal{C}) e associando ad ogni punto Q della retta T il punto dato da $\mathcal{C} \cdot \mathcal{P}_Q(\mathcal{C}) - P$.

Si osservi che ogni parametrizzazione si ottiene da un'altra per composizione con una proiettività.

In particolare tutte le coniche irriducibili sono tra loro equivalenti, ed esiste una unica classe di isomorfismo, con rappresentante $X^t X$. La geometria delle coniche quindi è essenzialmente equivalente alla geometria delle rette proiettive. Vediamo di esplicitare qualche nozione per capire cosa intendiamo.

6.2.1. BIRAPPORTI. Dati quattro punti di una conica irriducibile, i primi tre distinti, il loro rapporto è definito come il rapporto dei quattro punti corrispondenti di una qualunque parametrizzazione.

Attenzione: è definito il rapporto tra quattro punti del piano (per ogni quaterna passa qualche conica...)?

La scelta di una terna ordinata di punti distinti su una conica si dice un riferimento. Dato un riferimento, ogni punto della conica è determinato univocamente dal rapporto della quaterna data dai tre punti del riferimento e dal punto stesso.

6.2.2. PROIETTIVITÀ. Una proiettività di una conica in sè è una biiezione della conica in sè che conserva i rapporti per ogni quaterna di punti.

Risultati fondamentali riguardo le autoproiettività di una conica sono:

- (1) ogni autoproiettività è determinata dall'immagine di un riferimento (che è necessariamente un riferimento);
- (2) ogni autoproiettività del piano che sia stabile (globalmente) su una conica induce una autoproiettività della conica; e viceversa, ogni autoproiettività di una conica si estende unicamente ad una autoproiettività del piano che induce quella data sulla conica.

6.2.3. PROIETTIVITÀ TRA CONICHE. Problema per il lettore.

6.3. POLARITÀ. Poiché le coniche hanno grado due, esse hanno rispetto ad ogni punto solo la prima polare, che coincide con la polare lineare, e dunque:

- (1) se il punto appartiene alla conica, la polare è la retta tangente;