Per esercizio, si dualizzino le considerazioni fatte circa il teorema di Pascal, e anche i suoi casi limite.

5.5.2. Un esempio conico.

Una conica è determinata da cinque punti (non quattro allineati); è degenere sse tre dei punti sono allineati.

Una conica è determinata da cinque rette tangenti (non quattro in un fascio); è degenere sse tre delle rette sono in un fascio.

5.5.3. Un esempio cubico.

Tre punti di una cubica cuspoidale sono allineati se e solo se i tre punti di ulteriore intersezione della curva con le tangenti sono allineati.

Tre tangenti ad una cubica cuspoidale sono in un fascio se e solo se le tre tangenti agli ulteriori punti di intersezione sono in un fascio.

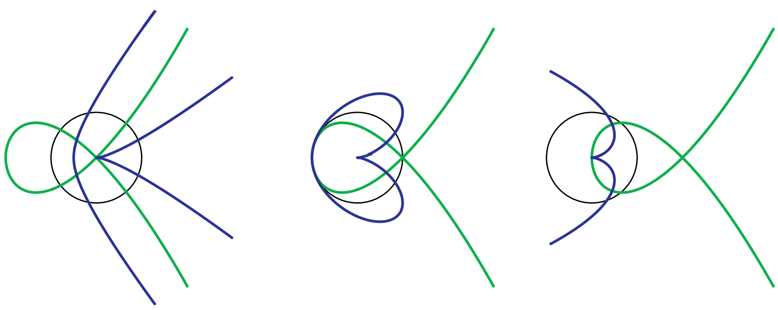
5.6. Formule di Plücker. Da quanto detto sulla dualità segue che, detti τ e κ il numero di nodi e cuspidi di $\mathscr{C}$ e detti b e f il numero di bitangenti e di tangenti flessionali di $\mathscr{C}$, risulta che $\tau^* = b$, $\kappa^* = f$ e $b^* = \tau$, $f^* = \kappa$ (le stesse lettere asteriscate riguardano la curva $\mathscr{C}^*$).

A questo punto possiamo enunciare le seguenti formule (di Plücker), che saranno mostrate dopo aver svolto la teoria dell'intersezione e lo studio locale delle curve: se $\mathscr{C}$ possiede solo nodi e cuspidi, flessi e bitangenti, valgono le seguenti relazioni tra il grado d di $\mathscr{C}$ a la sua classe d^*:

$$\begin{array}{ccc} d^* = d(d-1) - 2\tau - 3\kappa & & d = d^*(d^*-1) - 2b - 3f \\ & \text{e} & \\ \kappa^* = 3d(d-2) - 6\tau - 8\kappa & & \kappa = 3d^*(d^*-2) - 6b - 8f\ . \end{array}$$

Naturalmente (tenuto conto delle relazioni di uguaglianza prima notate) le formule non sono indipendenti tra loro: da tre di esse si ricava la rimanente.

5.7. Costruzione grafica della duale. Sfruttando la polarità associata ad una qualunque conica irriducibile, possiamo ottenere una costruzione grafica della curva duale di una curva data tramite il procedimento seguente: ad ogni tangente alla curva data si associa il suo polo rispetto alla conica scelta. Essenzialmente la conica irriducibile scelta viene utilizzata per "trasformare rette in punti" (cioè per identificare il piano duale con il piano stesso), e coniche diverse danno luogo a polari diverse (proiettivamente equivalenti?). Visto che il procedimento è suggestivo e divertente, riportiamo qui alcuni esempi (è interessante cercare le corrispondenze tra punti singolari, multitangenti, flessi...). Alcune variazioni della conica scelta (verde la curva, blu la duale, nera la conica): cubica nodale



cubica cuspoidale