$$\begin{aligned} m_T(\mathscr{C}^*) &= \text{minimo } e_T(\sigma\cdot\mathscr{C}^*) \text{ ove } \sigma \text{ retta di } \mathbb{P}^* \text{ per } T\\ &= \text{molteplicità di intersezione con } \mathscr{C}^* \text{ di } \sigma \text{ generica per } T\\ &= \text{quante volte compare } T \text{ nella intersezione con } \mathscr{C}^* \text{ di } \sigma \text{ generica per } T\\ &= \text{quante volte compare } t \text{ come tangente a } \mathscr{C} \text{ da } \Sigma \text{ generico punto di } t\\ &= \sum_P \text{ordine della tangente } t\\ &= \sum_P e_P(t\cdot\mathscr{C}) - m_P(\mathscr{C}) \end{aligned}$$

(somma sui punti di tangenza). In particolare, tangenti ordinarie di $\mathscr{C}$ danno luogo a punti non singolari di $\mathscr{C}^*$.

Capiremo del tutto questo problema dopo aver svolto lo studio locale delle curve, ma in alcuni casi è facile capire che cosa succede:

5.4.1. Nodi e bitangenti. Se $\mathscr{C}^*$ presenta un nodo, allora si tratta di una tangente di $\mathscr{C}$ che appartiene a due punti di $\mathscr{C}$ (le due tangenti nel nodo a $\mathscr{C}^*$); dunque un nodo di $\mathscr{C}^*$ corrisponde a una bitangente di $\mathscr{C}$, cioè una retta tangente in due punti distinti di $\mathscr{C}$. In particolare, perché $\mathscr{C}^*$ presenti un nodo è necessario che il grado di $\mathscr{C}$ sia almeno 4.

Più in generale: un punto multiplo m-uplo ordinario di $\mathscr{C}^*$ corrisponde ad una tangente m-upla di $\mathscr{C}$ (retta tangente a $\mathscr{C}$ in m punti distinti), che quindi avrà grado almeno $2m$.

5.4.2. Cuspidi e flessi. Se $\mathscr{C}^*$ presenta una cuspide, allora si tratta di una tangente di $\mathscr{C}$ che appartiene a due punti coincidenti di $\mathscr{C}$ (l'unica tangente nella cuspide a $\mathscr{C}^*$); dunque una cuspide di $\mathscr{C}^*$ corrisponde a una tangente di flesso di $\mathscr{C}$, cioè una retta tangente di $\mathscr{C}$ in un punto di flesso.

Questo spiega la situazione della cubica cuspoidale: nella curva duale compare una cuspide corrispondente all'unico flesso della curva. La situazione della cubica nodale è più complicata: avendo tre flessi allineati, la curva duale deve contenere tre cuspidi a tangenti concorrenti...

5.5. Dualità. Riassumento e generalizzando un po' quanto visto, si può estendere la nozione usuale di polarità del piano proiettivo nel modo seguente:

piano proiettivo (punteggiato)	piano duale (rigato)
punto	retta
retta	punto
punti (semplici) di $\mathscr{C}$	tangenti (semplici) di $\mathscr{C}^*$
tangenti (semplici) di $\mathscr{C}$	punti (semplici) di $\mathscr{C}^*$
bitangenti di $\mathscr{C}$	nodi di $\mathscr{C}^*$
nodi di $\mathscr{C}$	bitangenti di $\mathscr{C}^*$
flessi di $\mathscr{C}$	cuspidi di $\mathscr{C}^*$
cuspidi di $\mathscr{C}$	flessi di $\mathscr{C}^*$

5.5.1. Teorema di Brianchon. Per esempio, dualizziamo il teorema mistico di Pascal:

Pascal:	Brianchon:
un esagono è inscrivibile in una conica se e solo se i tre punti di intersezione di lati opposti sono allineati.	un esagono è circoscrivibile ad una conica se e solo se le tre rette congiungenti vertici opposti sono concorrenti (in un punto).

Ecco alcuni esempi di esagoni circoscritti ad una conica, e aventi le stesse rette come lati: