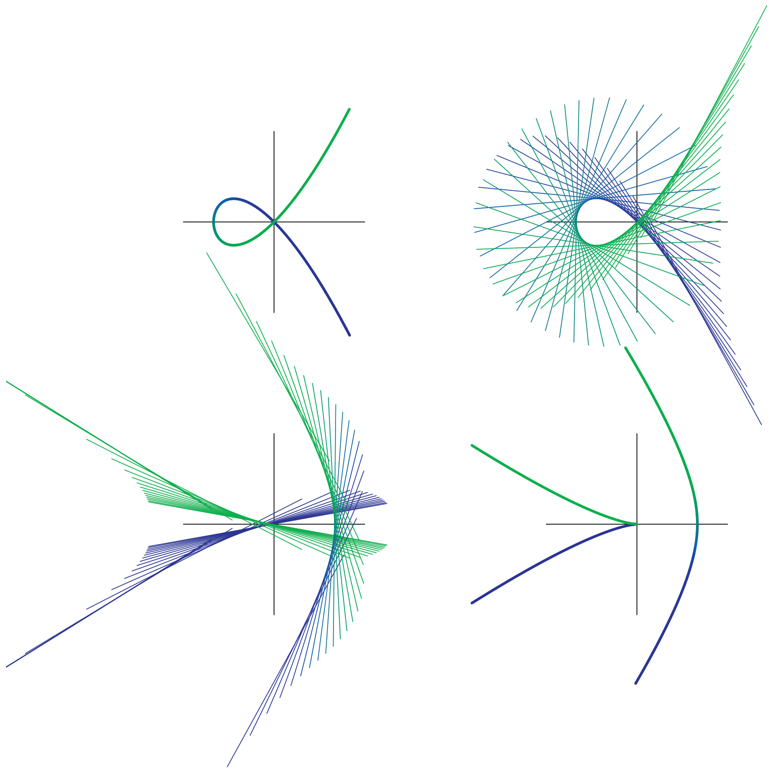
5.3.3. Duali di cubiche. Una cubica non singolare avrà classe 6, cioè duale di grado 6. Consideriamo invece le cubiche singolari:

(1) Sappiamo che la cubica di equazione $X_0X_2^2 = X_1^3$ ha una cuspide; la sua prima polare rispetto ad un qualsiasi punto è una conica che contiene il punto cuspoidale e ha ivi tangente esattamente quella della cuspide; dunque la cuspide contribuisce all'intersezione con ordine 3, e ci aspettiamo che la classe della cubica cuspoidale sia $6-3=3$ (per un punto generico vi saranno 3 tangenti alla curva).

Un conto esplicito a partire dalla parametrizzazione usuale $\begin{pmatrix} s^3 \\ st^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ dà che i punti della curva duale sono descritti parametricamente da $\begin{pmatrix} t^6 \\ -3s^2t^4 \\ 2s^3t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ -3s^2t \\ 2s^3 \end{pmatrix}$, che è di nuovo una cubica cuspoidale, di equazione $4X_1^3 + 27X_0X_2^2 = 0$.

(2) Sappiamo che la cubica di equazione $X_0X_2^2 = X_1^3 + X_0X_1^2$ ha un nodo; la sua prima polare rispetto ad un qualsiasi punto è una conica che contiene il nodo e ha ivi tangente diversa da quelle del nodo; dunque il nodo contribuisce all'intersezione con ordine 2, e ci aspettiamo che la classe della cubica nodale sia $6-2=4$ (per un punto generico vi saranno 4 tangenti alla curva).

Un conto esplicito a partire dalla parametrizzazione usuale $\begin{pmatrix} s^3 \\ s(t^2-s^2) \\ t(t^2-s^2) \end{pmatrix}$ dà che i punti della curva duale sono descritti parametricamente da $\begin{pmatrix} (t^2-s^2)^2 \\ -3s^2t^2+s^4 \\ 2s^3t \end{pmatrix}$, che è una quartica razionale (equazione?).



5.3.4. Tangenziale di curve razionali. È vero che la curva duale di una curva razionale è sempre razionale?

5.4. Singolarità della curva duale. A quali rette tangenti a $\mathscr{C}$ corrispondono i punti singolari della duale $\mathscr{C}^*$? In generale possiamo ragionare così per capire che molteplicità ha il punto T di $\mathscr{C}^*$ dato dalla tangente t alla curva $\mathscr{C}$ (nel punto P):