Per la bidualità, ragioniamo solo nel caso di curve razionali; dopo aver visto la teoria locale delle curve si vedrà che l'argomento svolto dà il risultato generale. Supponiamo allora che $\underline{X} = \underline{X}(\lambda)$ sia rappresentazione parametrica di $\mathscr{C}$ (usiamo un solo parametro non omogeneo per minimizzare la notazione). Allora i punti della curva tangenziale $\mathscr{C}^*$ sono descritti dalla parametrizzazione $\underline{\xi}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\underline{X}(\lambda) \times \underline{X}(\lambda)$ (prodotto vettore) e di conseguenza la curva biduale $\mathscr{C}^{**}$ è descritta dalla parametrizzazione

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\underline{\xi}(\lambda) \times \underline{\xi}(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\underline{X}(\lambda) \times \underline{X}(\lambda)\right) \times \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\underline{X}(\lambda) \times \underline{X}(\lambda)\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\underline{X}(\lambda) \times \underline{X}(\lambda)\right) \times \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\underline{X}(\lambda) \times \underline{X}(\lambda)\right)\end{aligned}$$

da cui si vede che è proporzionale a $\underline{X}(\lambda)$, poiché si tratta del prodotto vettore di due termini entrambi ortogonali a $\underline{X}(\lambda)$. □

5.1.1. Nella definizione si eclude il caso di rette, poiché in tal caso l'unica tangente è la retta stessa, che è un punto del piano duale...

5.1.2. Uno studio approfondito della nozione di curva duale sarà possibile solo dopo aver condotto lo studio locale delle curve algebriche piane; in effetti potremo mostrare allora un risultato molto forte, secondo cui una curva e la sua duale sono birazionalmente equivalenti. Per il momento accettiamo che $\mathscr{C}^*$ sia una curva algebrica, in base al fatto che essa è l'immagine della curva $\mathscr{C}$ tramite una applicazione polinomiale di grado $d-1$ indotta (genericamente) dalla posizione $\varphi\underline{X} = \nabla g(\underline{X})$, cioè

$$\varphi\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_0} \\ \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial g}{\partial X_2} \end{pmatrix}$$

e anche che il grado di $\mathscr{C}^*$, cioè la classe di $\mathscr{C}$, è al più $d(d-1)$.

5.2. Interpretazione geometrica della classe. L'ordine di una curva piana si può identificare con il numero di intersezioni con una generica retta, ed in effetti con qualsiasi retta se si considerano le molteplicità.

Dualmente, la classe di una curva, essendo l'ordine della curva duale, si identifica con il numero di tangenti a $\mathscr{C}$ da un punto generico del piano alla curva $\mathscr{C}$ stessa (infatti una retta generica r del piano duale è un punto generico P del piano, e cercare le sue intersezioni con $\mathscr{C}^*$ significa cercare i punti del piano duale che appartengono a $\mathscr{C}^*$, cioè le rette del piano per P che sono tangenti a $\mathscr{C}$).

Ricordando quanto detto per le prime polari, possiamo allora affermare che se $\mathscr{C}$ è curva liscia, cioè priva di punti singolari, allora la sua classe è esattamente $d(d-1)$. Invece ci aspettiamo che le singolarità facciano abbassare la classe della curva.

5.2.1. Questo risultato per le curve lisce suggerisce un simpatico (apparente) paradosso: una curva generica $\mathscr{C}$ del piano è liscia, cioè non ha punti singolari; quindi se il suo grado è d, la sua classe è $c = d(d-1)$. Ora, questo è il grado della curva $\mathscr{C}^*$, anch'essa genericamente liscia, per cui la sua classe, che è il grado di $\mathscr{C}$ dev'essere $d = c(c-1)$. Sostituendo la prima formula nella seconda si trova $d^2(d-2) = 0$, da cui $d = 2$ e si deduce che una curva piana generica è una conica! O no?

5.3. Esempi. Diamo qui di seguito alcuni esempi in cui è possibile calcolare esplicitamente con metodi elementari la curva duale.

5.3.1. Consideriamo le curve di Fermat di equazione $X_0^m + X_1^m + X_2^m = 0$ per $m \leqslant 2$. La curva duale è descritta da $\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0^{m-1} \\ X_1^{m-1} \\ X_2^{m-1} \end{pmatrix}$ al variare del punto sulla curva, e quindi la sua equazione si può trovare razionalizzando l'espressione $\xi_0^{\frac{m}{m-1}} + \xi_1^{\frac{m}{m-1}} + \xi_2^{\frac{m}{m-1}}$. In alcuni casi è particolarmente facile:

($m = 2$) risulta già razionale: la curva è $\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$;

($m = 3$) la curva è $(\xi_0^3 + \xi_1^3 - \xi_2^3)^2 + 4\xi_0^3\xi_1^3 = 0$;

($m = 4$) la curva è $(\xi_0^4 + \xi_1^4 + \xi_2^4)^3 - 9\xi_0^4\xi_1^4\xi_2^4 = 0$.

5.3.2. Duali di coniche. Una conica irriducibile ha quindi come duale una conica irriducibile, come è ben noto: se la conica ha equazione$\underline{X}^{\mathrm{t}}A\underline{X}$ con A matrice simmetrica invertibile d'ordine 3, allora la curva duale è la conica di matrice A^{-1}.