4.3.3. La curva hessiana di $\mathscr{C}$ contiene tutti i punti singolari di $\mathscr{C}$ (segue dalla formula di Eulero). Infatti, dalla formula $H_g(\underline{X})\underline{X} = (d-1)\nabla g(\underline{X})$, segue che se P è punto singolare abbiamo che $H_g(P)$ è matrice singolare (ha nucleo non nullo, poiché vi sta P stesso).

4.3.4. Espressione in coordinate affini. Può essere utile avere una formula per calcolare l'hessiana di una curva affine (per definizione sarà l'affinizzata della curva hessiana di un suo completamento proiettivo) usando l'espressione affine, cioè senza bisogno di omogeneizzare l'equazione. Tramite operazioni elementari su righe e colonne della matrice il cui determinante definisce l'hessiano, possiamo ottenere la forma

$$\det\left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j}\right) = \frac{1}{X_0^2}\det\begin{pmatrix} d(d-1)g & (d-1)\frac{\partial g}{\partial X_1} & (d-1)\frac{\partial g}{\partial X_2} \\ (d-1)\frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial X_1 \partial X_2} \\ (d-1)\frac{\partial g}{\partial X_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial X_2^2} \end{pmatrix}$$

(basta sommare alla prima riga moltiplicata per X_0 le altre due moltiplicate per le rispettive variabili, e usare la formula di Eulero, e poi fare lo stesso alla prima colonna) da cui otteniamo l'espressione affine deomogeneizzata

$$\det\begin{pmatrix} d(d-1)f & (d-1)\frac{\partial f}{\partial X} & (d-1)\frac{\partial f}{\partial Y} \\ (d-1)\frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} \\ (d-1)\frac{\partial f}{\partial Y} & \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \det\begin{pmatrix} \frac{d}{d-1}f & \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial f}{\partial Y} & \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \end{pmatrix}$$

(per esercizio, scrivere l'analoga formula per le altre disomogeneizzazioni).

4.4. Teorema (fondamentale dell'hessiana). *Sia $\mathscr{C}$ una curva piana, di grado almeno 3. Allora $\mathrm{Supp}(\mathscr{C}) \cap \mathrm{Supp}(\mathscr{H}_\mathscr{C})$ consiste dei punti singolari di $\mathscr{C}$ e dei punti di flesso di $\mathscr{C}$.*

Dimostrazione. È immediato dalla osservazione sui punti singolari e dal criterio differenziale per i punti di flesso. □

4.4.1. Stima sul numero di flessi. In particolare, se $\mathscr{C}$ non è singolare, allora i punti di $\mathrm{Supp}(\mathscr{C}) \cap \mathrm{Supp}(\mathscr{H}_\mathscr{C})$ sono quelli di flesso di $\mathscr{C}$; anticipando una applicazione del teorema di Bézout, possiamo quindi dire che ogni curva di grado almeno 3 possiede almeno un flesso, e che contiene al più $3\deg\mathscr{C}(\deg\mathscr{C}-2)$ flessi, esattamente quel numero se contati con la opportuna molteplicità.

4.4.2. Esempi. Una cubica non singolare ha nove flessi. Una quartica non singolare ha 24 flessi.

4.4.3. Flessi d'ordine superiore. Dopo aver parlato di intersezione di curve, potremmo dimostrare che: un flesso P è r-uplo se e solo se la molteplicità di intersezione in P di $\mathscr{C}$ con $\mathscr{H}_\mathscr{C}$ è r.

5. Curve Duali o Tangenziali.

5.1. Definizione-Teorema (Curva duale, Classe). *Data una curva piana proiettiva $\mathscr{C}$ priva di componenti lineari, il sottinsieme del piano duale formato dalle tangenti a $\mathscr{C}$ nei suoi punti è una curva proiettiva $\mathscr{C}^*$, detta curva duale o inviluppo o tangenziale di $\mathscr{C}$. L'ordine della curva duale si chiama classe della curva $\mathscr{C}$.*

Inoltre risulta che $(\mathscr{C}^*)^* = \mathscr{C}$ via l'identificazione canonica del piano proiettivo con il suo biduale.

Dimostrazione. Una dimostrazione rigorosa di quanto enunciato richiede qualche tecnica di eliminazione per polinomi, che vedremo nel prossimo capitolo, ma che in qualche caso risulta facile. Bisogna provare che i punti del piano duale corrispondenti alle tangenti ad una curva soddisfano ad una equazione polinomiale; ora se $g(\underline{X})$ è una equazione per $\mathscr{C}$, allora i punti $\underline{\xi}$ della curva duale sono quelli per cui uno dei seguenti sistemi (equivalenti, vista la formula di Eulero):

$$\begin{cases} \underline{\xi} = \nabla g(\underline{X}) \\ g(\underline{X}) = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \underline{\xi} = \nabla g(\underline{X}) \\ \underline{\xi}^{\mathrm{t}}\underline{X} = 0 \end{cases}$$

ammette soluzione per qualche $\underline{X}$. Si tratta di una rappresentazione parametrica dalla quale possiamo "eliminare i parametri $\underline{X}$" per ottenere una equazione polinomiale $g^*(\underline{\xi})$ soddisfatta da tutti (e soli?) i punti del piano duale che compaiono come tangenti a $\mathscr{C}$.