(semplici applicazioni della formula di Eulero). Lo sviluppo di Taylor di g lungo una retta $P+\mu\underline{X}$ passante per P è della forma

$$g(P+\mu\underline{X}) = \mu\nabla g(P)\underline{X} + \frac{1}{2}\mu^2\underline{X}^{\mathrm{t}}H_g(P)\underline{X} + \cdots$$

Ora: se il punto è di flesso, significa che tutti i punti della retta tangente in P (equazione $\nabla g(P)\underline{X}=0$) annullano il termine di secondo grado, dunque la conica di equazione $\underline{X}^{\mathrm{t}}H_g(P)\underline{X}=0$ contiene la retta tangente, e quindi si riduce, da cui $\det H_g(P)=0$, come si voleva.

Viceversa, se il determinante è nullo, significa che la conica di equazione $\underline{X}^{\mathrm{t}}H_g(P)\underline{X}=0$ si spezza in due rette: vogliamo verificare che una delle due è la tangente in P, di modo che P risulterà essere un flesso. Poiché P appartiene alla conica (dalla seconda formula preliminare; la prima formula preliminare invece dice che P non sarà il punto singolare della conica...) possiamo scegliere la retta L per P contenuta nella conica, e un qualsiasi punto Q su di essa; abbiamo allora $P^{\mathrm{t}}H_g(P)Q=0$ (la retta $P\vee Q$ è tutta contenuta nella conica) da cui $\nabla g(P)^{\mathrm{t}}Q=0$ (dalla trasposta della prima formula preliminare) e quindi Q appartiene alla tangente a $\mathscr{C}$ in P, per cui tale tangente coincide con L, come si voleva.

In alternativa: poiché P appartiene alla conica (dalla seconda formula preliminare) l'intersezione della retta tangente con la conica sarà data da P e (almeno) un altro punto Q (la prima formula preliminare dice che P non sarà punto singolare della conica, che quindi si spezza in due rette distinte non enrambe passanti per P...); tale punto soddisfa a $\nabla g(P)^{\mathrm{t}}Q=0$ (sta sulla tangente) e quindi a $P^{\mathrm{t}}H_g(P)Q=0$ (dalla trasposta della prima formula preliminare), e quindi tutta la retta $P\vee Q$, che è la tangente, appartiene alla conica (P e Q sono vettori isotropi e ortogonali per la forma quadratica di matrice $H_g(P)$).

4.2.1. Esempi. Come al solito, vediamo le cubiche singolari irriducibili.

(1) La cubica cuspoidale $X_0X_2^2=X_1^3$ contiene un unico flesso. Infatti il determinante della matrice hessiana è $24X_1X_2^2$, e gli unici punti che appartengono alla curva sono $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ che è singolare e $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ che è semplice, dunque un flesso.

(2) La cubica nodale $X_0X_1X_2=X_1^3+X_2^3$ contiene tre flessi che risultano allineati. Infatti il determinante della sua matrice hessiana è $2(X_0X_1X_2+3(X_1^3+X_2^3))$ e i suoi punti che appartengono anche alla curva data risolvono il sistema $X_0X_1X_2=0=X_1^3+X_2^3$. Essi sono $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ che è singolare e i tre punti $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\\omega\end{smallmatrix}\right)$ ove ω, varia sulle tre radici cubiche di -1, che sono semplici, dunque flessi, e appartengono tutti alla retta $X_0=0$.

4.3. Definizione (Curva Hessiana). *Data una curva piana $\mathscr{C}=\operatorname{div} g$ di grado almeno 3, definiamo la curva hessiana di $\mathscr{C}$ come $\mathscr{H}_{\mathscr{C}} := \operatorname{div} h_g(\underline{X})$ ove $h_g(\underline{X}) := \det\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial X_i\partial X_j}\right)$ (questo polinomio, di grado $3(d-2)$ se d era il grado di $\mathscr{C}$, si dice hessiano di g).*

4.3.1. Esempio: fascio (delle cubiche) di Hasse. Consideriamo le cubiche di equazioni $g_m(\underline{X})=X_0^3+X_1^3+X_2^3+6mX_0X_1X_2$ al variare di $m\in K$.

Allora $h_{g_m}=(1+2m^3)X_0X_1X_2-m^2(X_0^3+X_1^3+X_2^3)$, ovvero si tratta di un'altra cubica dello stesso fascio.

Il luogo base del fascio rappresenta quindi i punti di flesso (comuni a tutte le cubiche non singolari del fascio di Hesse) e si tratta dei nove punti di coordinate proiettive $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\\omega\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\\omega\end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix}1\\\omega\\0\end{smallmatrix}\right)$ ove ω varia sulle radici cubiche di -1.

4.3.2. La definizione di curva hessiana usa l'espressione della curva in un fissato riferimento, ma essa è indipendente dal riferimento, cioè è un invariante proiettivo della curva, poiché se T è una proiettività del piano abbiamo che $\mathscr{H}_{T\mathscr{C}}=T(\mathscr{H}_{\mathscr{C}})$. Possiamo verificare questo considerando una proiettività T, che confondiamo con la sua matrice, osservando che se $g(\underline{X})$ è l'equazione originale di $\mathscr{C}$, allora nelle $\underline{Y}=T\underline{X}$ l'equazione di $\mathscr{C}$ (ovvero di $T(\mathscr{C})$) diventa $g^T(\underline{Y})=g(T^{-1}\underline{Y})$. Allora abbiamo dalla formula di composizione che $H_{g^T}(\underline{Y})=T_{-\mathrm{t}}H_g(T^{-1}\underline{Y})T^{-1}$ (verificare: conviene l'espressione $H=\nabla^{\mathrm{t}}\nabla$ nelle variabili usate). Ne segue subito che l'equazione di $\mathscr{H}_{T\mathscr{C}}$ è proporzionale all'equazione di $T(\mathscr{H}_{\mathscr{C}})$.