3.3.3. I casi più importanti sono le prime due e le ultime due polari:

$$\begin{aligned}
\text{prima polare} \quad & \mathscr{P}_Q^{(1)}(\mathscr{C}) : \sum_{|\underline{\alpha}|=1} D_{\underline{\alpha}} g(\underline{X}) Q^{\underline{\alpha}} \\
\text{seconda polare} \quad & \mathscr{P}_Q^{(2)}(\mathscr{C}) : \sum_{|\underline{\alpha}|=2} D_{\underline{\alpha}} g(\underline{X}) Q^{\underline{\alpha}} \\
\text{polare conica} \quad & \mathscr{P}_Q^{(d-2)}(\mathscr{C}) : \sum_{|\underline{\alpha}|=2} D_{\underline{\alpha}} g(\underline{Q}) X^{\underline{\alpha}} \\
\text{polare lineare} \quad & \mathscr{P}_Q^{(d-1)}(\mathscr{C}) : \sum_{|\underline{\alpha}|=1} D_{\underline{\alpha}} g(\underline{Q}) X^{\underline{\alpha}}
\end{aligned}$$

(abbiamo usato la reciprocità del calcolo differenziale per polinomi omogenei).

3.3.4. Appartenenza. Un punto Q appartiene alla curva se e solo se appartiene ad una (e allora ad ogni) sua polare; in tal caso la polare lineare è la retta tangente, se il punto è semplice. Se invece il punto P è multiplo per $\mathscr{C}$ di molteplicità $m = m_P(\mathscr{C})$, allora esso ha la stessa molteplicità e le stesse rette tangenti per ogni polare $\mathscr{P}_P^{(i)}(\mathscr{C})$ per $i \leqslant d-m$ (in particolare $\mathscr{P}_P^{(d-m)}(\mathscr{C})$ è il complesso tangente).

3.3.5. Reciprocità. Dati due punti P e Q, abbiamo che P appartiene a $\mathscr{P}_Q^{(i)}(\mathscr{C})$ se e solo se Q appartiene a $\mathscr{P}_P^{(d-i)}(\mathscr{C})$.

In particolare, se $\mathscr{P}_P^{(d-i)}(\mathscr{C})$ è illusoria (cioè $p_P^{(d-i)}(\mathscr{C}) = 0$) allora il punto P appartiene a $\mathscr{P}_Q^{(i)}(\mathscr{C})$ per ogni punto Q.

3.3.6. Iterazione. Dati due punti P e Q, risulta che $\mathscr{P}_P^{(i)}(\mathscr{P}_Q^{(j)}(\mathscr{C})) = \mathscr{P}_Q^{(j)}(\mathscr{P}_P^{(i)}(\mathscr{C}))$.

Inoltre abbiamo $\mathscr{P}_P^{(i)}(\mathscr{P}_P^{(j)}(\mathscr{C})) = \mathscr{P}_P^{(i+j)}(\mathscr{C})$.

3.3.7. Singolarità. Un punto Q della curva è singolare m-uplo se e solo se $p_Q^{(d-m)}(g)$ è identicamente nullo, e nessun $p_Q^{(i)}(g)$ per $i < m$ è identicamente nullo.

3.3.8. Variazioni lineari. Le polari $\mathscr{P}_P(\mathscr{C})$ al variare di P su una fissata retta L determinano un fascio di curve aventi punti base tutti i punti la cui polare lineare è illusoria oppure la retta data: sono i Q per cui $p_Q^{(d-1)}(\mathscr{C}) = 0$ oppure $\mathscr{P}_Q^{(d-1)}(\mathscr{C}) = L$.

3.3.9. Esempi. La polare lineare di un punto doppio è illusoria; la polare quadratica di un nodo è la coppia delle tangenti, e quella di una cuspide è la tangente (contata due volte).

3.4. Condizioni lineari. Si osservi che imporre ad una curva di grado d di avere come i-esima polare rispetto ad un fissato punto Q una fissata curva di grado $d-i$ è una condizione lineare. Un caso particolare già incontrato si ottiene se il punto cade sulla curva e $d-i = 1$ (tangente).

4. Curve Hessiane.

4.1. Definizione (Flessi). *Un punto semplice P di una curva piana $\mathscr{C}$ si dice un flesso se la retta t_P tangente a $\mathscr{C}$ in P non è contenuta in $\mathscr{C}$ e risulta $m_P(t_P \cdot \mathscr{C}) \geqslant 3$. L'intero $r = m_P(t_P \cdot \mathscr{C}) - 2$ si dice la molteplicità o ordine di P come flesso di $\mathscr{C}$.*

4.1.1. Esempi. Seguendo la definizione, ogni punto di ogni retta sarebbe di flesso, ma si evita di applicarla.

Ovviamente le coniche non contengono flessi (nessuna retta può avere un ciclo intersezione d'ordine maggiore di 2 con una conica).

Quindi questo paragrafo riguarda essenzialmente solo curve di grado almeno tre.

4.2. Criterio differenziale. *Un punto semplice P di una curva piana $\mathscr{C} = \operatorname{div} g$ è un flesso se e solo se* $\det\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j}(P)\right) = 0$ *(la matrice delle derivate seconde si chiama spesso matrice hessiana di g e si indica con $H_g(\underline{X})$).*

Si osservi in via preliminare che

$$H_g(\underline{X})\underline{X} = (\deg g - 1)\nabla g(\underline{X}) \qquad \text{e} \qquad \underline{X}^{\mathrm{t}} H_g(\underline{X})\underline{X} = \deg g(\deg g - 1) g(\underline{X})$$