3.2. Teorema (fondamentale della polare). *Sia $\mathscr{C}$ una curva piana senza componenti multiple o lineari. Allora* $\mathrm{Supp}(\mathscr{C}) \cap \mathrm{Supp}(\mathscr{P}_Q(\mathscr{C}))$ *consiste dei punti singolari di $\mathscr{C}$ e dei punti di tangenza con $\mathscr{C}$ delle rette per Q tangenti a $\mathscr{C}$.*

Dimostrazione. Sappiamo già che i punti singolari appartengono all'intersezione di $\mathscr{C}$ con qualsiasi sua polare. Supponiamo allora che $P \in \mathrm{Supp}(\mathscr{C})$ sia punto semplice di $\mathscr{C}$. Scegliamo un riferimento in cui P sia l'origine affine, e Q punto improprio dell'ascissa. Allora l'equazione f di $\mathscr{C}$ è priva di termine noto. Il termine f_1 è tale che X non vi compaia (cioè P appartenga alla polare $\mathscr{P}_Q(\mathscr{C})$) se e solo se la tangente in P è $Y = 0$, esattamente $P \vee Q$ (se g è l'equazione omogenea, allora manca il termine in X_0^d, e il termine che moltiplica X_0^{d-1} dev'essere del tipo $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$; ora $\alpha_1 = 0$ è condizione equivalente sia a che la derivata parziale $\alpha_1 X_0^{d-1}$ rispetto a X_1 si annulli nell'origine, sia a che la retta tangente nell'origine sia $X_2 = 0$).

In termini più astratti si può ragionare così: la tangente in P alla curva ha equazione $\nabla g(P) \cdot X = 0$, mentre la polare rispetto a Q ha equazione $\nabla g(X) \cdot Q = 0$; quindi Q appartiene alla tangente in P se e solo se P appartiene alla polare rispetto a Q... □

3.2.1. Tangenti alla curva da punti del piano. In particolare, se $\mathscr{C}$ non è singolare, allora i punti di $\mathrm{Supp}(\mathscr{C}) \cap \mathrm{Supp}(\mathscr{P}_Q(\mathscr{C}))$ sono quelli di tangenza con $\mathscr{C}$ di rette per Q tangenti a $\mathscr{C}$; anticipando una applicazione del teorema di Bézout, possiamo quindi dire che si tratta di al più $d(d-1)$ punti, e che quindi per ogni punto del piano vi sono al più $d(d-1)$ rette per quel punto tangenti ad una curva irriducibile di grado d.

3.2.2. Esempi. Il lettore conosce già la situazione per le coniche irriducibili. Consideriamo qui le cubiche irriducibili singolari.

(1) La cubica di equazione $X_0X_2^2 = X_1^3$ ha una cuspide nell'origine, e la sua polare rispetto al punto Q è la conica di equazione $q_0X_2^2 - 3q_1X_1^2 + 2q_2X_0X_2 = 0$, ovvero di matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_2 \\ 0 & -3q_1 & 0 \\ q_2 & 0 & q_0 \end{pmatrix}$, e dunque degenere se e solo se $q_1q_2 = 0$. Se $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ q_2 \end{pmatrix}$ allora la polare è $X_2(X_2 + 2q_2X_0) = 0$ (la seconda retta identifica il punto di tangenza). Se $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora la polare è $X_2^2 - 3q_1X_1^2 = (X_2 + \sqrt{3q_1}X_1)(X_2 - \sqrt{3q_1}X_1) = 0$ (le due rette identificano i due punti di tangenza). Altrimenti, parametrizzando la curva tramite $\begin{pmatrix} s^3 \\ st^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ e sostituendo nella polare si trova l'equazione $t^3(q_0t^3 - 3q_1s^2t + 2q_2s^3) = 0$ il cui secondo termine dà in generale tre punti distinti della cubica, che sono i punti di tangenza da Q.

(2) La cubica di equazione $X_0X_1X_2 = X_1^3 + X_2^3$ ha un nodo nell'origine, e la sua polare rispetto al punto Q è la conica di equazione $q_0(X_1X_2) + q_1(X_0X_2 - 3X_1^2) + q_2(X_0X_1 - 3X_2^2) = 0$, ovvero di matrice $\begin{pmatrix} 0 & q_2 & q_1 \\ q_2 & -6q_1 & q_0 \\ q_1 & q_0 & -6q_2 \end{pmatrix}$, e dunque degenere se e solo se $2q_0q_1q_2 + 6q_1^3 + 6q_2^3 = 0$ (punti di una cubica con un nodo...). Parametrizzando la curva tramite $\begin{pmatrix} s^3+t^3 \\ s^2t \\ st^2 \end{pmatrix}$ e sostituendo nella polare si trova l'equazione $st(q_1t^4 - 2q_2st^3 + q_0s^2t^2 - 2q_1s^3t + q_2s^4) = 0$ il cui secondo termine dà in generale quattro punti distinti della cubica, che sono i punti di tangenza da Q.

♠ **3.3.** Polari superiori. Chiaramente, la teoria delle curve polari si può estendere ad ordini superiori nel modo seguente. Dati una curva proiettiva $\mathscr{C} = \operatorname{div} g$ e un punto Q, per ogni $i \in \mathbb{N}$ definiamo la polare i-esima di $\mathscr{C}$ rispetto a Q come la curva $\mathscr{P}_Q^{(i)}(\mathscr{C})$ di equazione $p_Q^{(i)}(g) := \sum_{|\underline{\alpha}|=i} D_{\underline{\alpha}} g(\underline{X}) Q^{\underline{\alpha}}$. Si tratta di una curva di grado $d-i$ se d era il grado di $\mathscr{C}$, e chiaramente $\mathscr{P}_Q^{(1)}(\mathscr{C}) = \mathscr{P}_Q(\mathscr{C})$ (la polare precedentemente definita).

3.3.1. Anche qui si verifica che ogni polare è un invariante proiettivo.

3.3.2. Per formalizzare meglio l'operazione di generazione della polare i-esima si può utilizzare l'operatore ∇ e le sue potenze formali. Come?