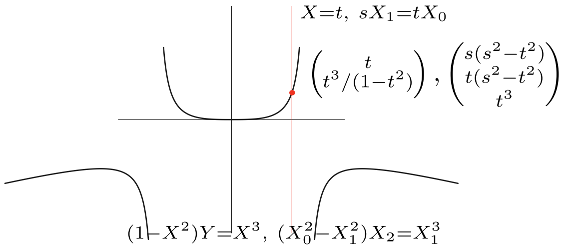
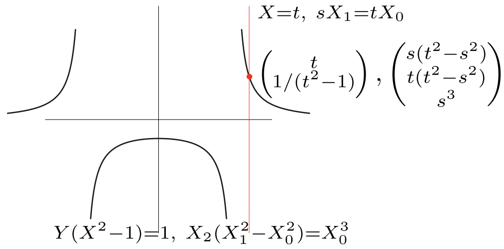
e





Il lettore può divertirsi a verificare i conti (attenzione ai disegni: in molti casi la singolarità si nasconde all'infinito).

2.1.9. Degli esempi precedenti: bifogli, trifogli e quadrifogli sono razionali?

2.1.10. Degli esercizi del primo capitolo: cissoide di Diocle, concoide di Nicomede, concoide di Pascal, Lemniscata di Bernoulli sono curve razionali? Suggerimento: usare eventualmente opportuni fasci di coniche passsanti per i punti singolari delle curve, e con condizioni di tangenza (alle tangenti delle curve).

2.1.11. Quartiche con tre punti doppi sono razionali, oppure riducibili: perché? Si noti però che abbiamo incontrato quartiche razionali aventi solo due punti doppi (e nessun'altra singolarità); vi sono quartiche razionali con un solo punto doppio (e nessun'altra singolarità)?

2.1.12. PROBLEMA (IMPOSSIBILE PER ORA?). È vero che se una curva è razionale, se ne può trovare una parametrizzazione intersecando la curva stessa con un fascio di curve di qualche grado? Finora abbiamo usato fasci di rette e fasci di coniche.

3. Curve Polari.

3.1. DEFINIZIONE (PRIMA POLARE). *Data una curva piana proiettiva $\mathscr{C} = \operatorname{div} g$ e $Q \in \mathbb{P}^2(K)$ un punto del piano, diciamo (prima) polare di $\mathscr{C}$ rispetto a Q la curva $\mathscr{P}_Q(\mathscr{C}) = \operatorname{div}(p_Q(g))$ di equazione $p_Q(g) := \nabla(g)Q = \sum_{i=0}^{2} Q_i \frac{\partial g}{\partial X_i}(\underline{X})$. Si tratta di una curva di grado $d-1$ se d era il grado della curva data.*

3.1.1. INVARIANZA PROIETTIVA. La definizione usa l'espressione della curva e del punto in un fissato riferimento, ma essa è indipendente dal riferimento, cioè è un invariante proiettivo della curva, poiché se T è una proiettività del piano abbiamo che $\mathscr{P}_{TQ}(T\mathscr{C}) = T(\mathscr{P}_Q(\mathscr{C}))$.

Possiamo verificare questo considerando una proiettività T, che confondiamo con la sua matrice, osservando che se $g(\underline{X})$ è l'equazione originale di $\mathscr{C}$, allora nelle $\underline{Y} = T\underline{X}$ l'equazione di $\mathscr{C}$ (ovvero di $T(\mathscr{C})$) diventa $g^T(\underline{Y}) = g(T^{-1}\underline{Y})$. Allora abbiamo dalla formula di composizione che $\nabla_Y g^T(\underline{Y}) = \nabla_Y g(T^{-1}\underline{Y}) = \nabla_X g(T^{-1}\underline{Y})T^{-1}$ (verificare!). Ne segue subito che l'equazione di $\mathscr{P}_{TQ}(T\mathscr{C})$ è

$$p_{y_Q} g^T(\underline{Y}) = \nabla_Y g^T(\underline{Y}) y_Q = \nabla_X g(T^{-1}\underline{Y})T^{-1} y_Q = \nabla_X g(T^{-1}\underline{Y}) x_Q = p_{x_Q} g(T^{-1}\underline{Y})$$

ovvero l'equazione di $T(\mathscr{P}_Q(\mathscr{C}))$.

3.1.2. CONDIZIONI DI ESISTENZA. La polare $\mathscr{P}_Q(\mathscr{C})$ non è definita (cioè è illusoria, nel senso che $p_Q(g)$ è identicamente nullo) se e solo se $\mathscr{C}$ ha come supporto una collezione di rette per Q. Infatti, supponendo che Q sia l'origine usuale, la condizione $p_Q(g) = 0$ significa che g non dipende da X_0...

3.1.3. Se $\mathscr{C}$ non ha componenti multiple, allora le componenti irriducibili comuni a $\mathscr{C}$ e alla polare $\mathscr{P}_Q(\mathscr{C})$ devono essere rette passanti per Q. Infatti, se f è l'equazione di $\mathscr{C}$ e $f = gh$ con g irriducibile e comune alla polare, allora per il lemma di Study g divide $p_Q(f) = p_Q(g)h + gp_Q(h)$, e dunque g divide $p_Q(g)h$, e infine g divide $p_Q(g)$ (g è irriducibile e non divide h, altrimenti f avrebbe componenti multiple). Ma allora $p_Q(g) = 0$, il che significa che g ha grado 1 e $Q \in V(g)$, come si voleva.

3.1.4. SINGOLARITÀ. È chiaro dalla definizione che i punti singolari di $\mathscr{C}$ sono contenuti nelle polari $\mathscr{P}_Q(\mathscr{C})$ per qualsiasi punto Q.

3.1.5. APPARTENENZA. Un punto Q appartiene alla propria polare $\mathscr{P}_Q(\mathscr{C})$ se e solo se appartiene alla curva.