2.1.3. Condizioni affini di razionalità. Una curva affine $\mathscr{C} = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2(K)$ è razionale se esistono due funzioni razionali $\varphi(t), \psi(t) \in K(t)$ (corpo quoziente di $K[t]$) tali che $f(\varphi(t), \psi(t)) = 0 \in K(t)$ (cioè sia identicamente nullo). In tal caso le $\begin{cases} X = \varphi(t) \\ Y = \psi(t) \end{cases}$ si dicono una rappresentazione parametrica di $\mathscr{C}$.

Il vettore $\begin{pmatrix} \frac{d\varphi}{dt}(t) \\ \frac{d\psi}{dt}(t) \end{pmatrix}$ è la direzione della tangente a $\mathscr{C}$ nel punto $\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$ se il punto è semplice.

Se $\varphi(t) = \varphi_1(t)/\varphi_0(t)$ e $\psi(t) = \varphi_2(t)/\varphi_0(t)$ ove $\varphi_i(t)$ sono polinomi, come trovare una rappresentazione parametrica della chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$?

2.1.4. Coniche irriducibili. Le coniche irriducibili del piano sono curve razionali. È ben noto che per parametrizzare una conica $\mathscr{C}$ è sufficiente scegliere un punto P della conica e scrivere la funzione dal fascio di rette per P nella conica che associa ad ogni retta r il punto $r \cdot \mathscr{C} - P$ di intersezione con la conica (diverso da P se la retta non è tangente).

Esplicitare delle parametrizzazioni per le coniche affini in forma canonica (ellissi, iperboli e parabole).

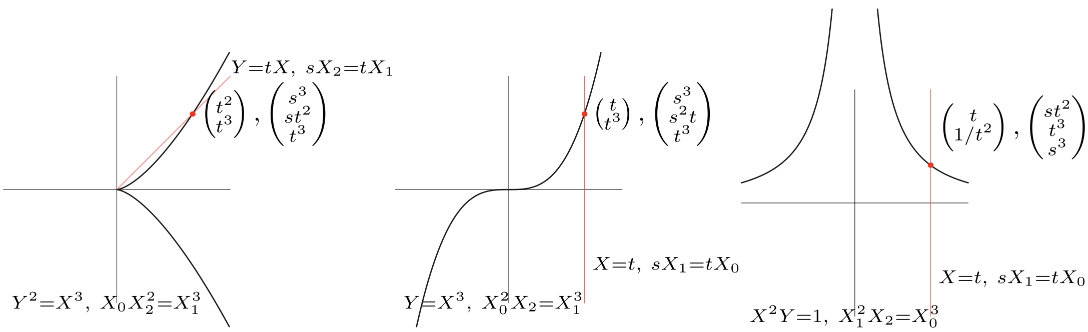
2.1.5. Osservazione. *Una curva piana irriducibile di grado d dotata di un punto di molteplicità $d-1$ è razionale.* Infatti, se il punto in questione è l'origine, allora $f(X,Y) = f_{d-1}(X,Y) + f_d(X,Y)$ e utilizzando il fascio di rette per quel punto (quasi ogni retta interseca la curva con molteplicità $d-1$ nell'origine, e quindi solo in un altro punto della curva) si ottiene che una rappresentazione parametrica è data da $\begin{cases} X = -\frac{f_{d-1}(1,t)}{f_d(1,t)} \\ Y = -t\frac{f_{d-1}(1,t)}{f_d(1,t)} \end{cases}$.

Si possono anche esplicitare delle parametrizzazioni proiettive nella forma $\begin{cases} X_0 = -f_d(s,t) \\ X_1 = sf_{d-1}(s,t) \\ X_2 = tf_{d-1}(s,t) \end{cases}$.

2.1.6. Si noti ora, anche se è un po' assurdo, che: le rette (grado 1) sono razionali in quanto hanno punti 0-upli (!), le coniche (grado 2) irriducibili sono razionali in quanto hanno punti 1-upli.

2.1.7. Problema. Se una curva piana di grado d ha un punto singolare di molteplicità $d-1$, essa si decompone in una curva razionale e un insieme di rette per quel punto (tangenti alla curva)?

2.1.8. Cubiche singolari irriducibili. In particolare le cubiche irriducibili con un punto doppio sono razionali. Diamo qui alcune parametrizzazioni per varie presentazioni di una cubica con cuspide:



e con nodo: