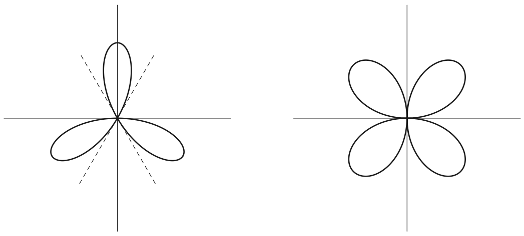
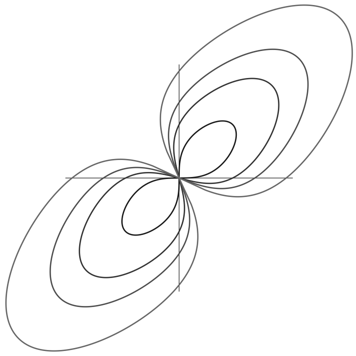
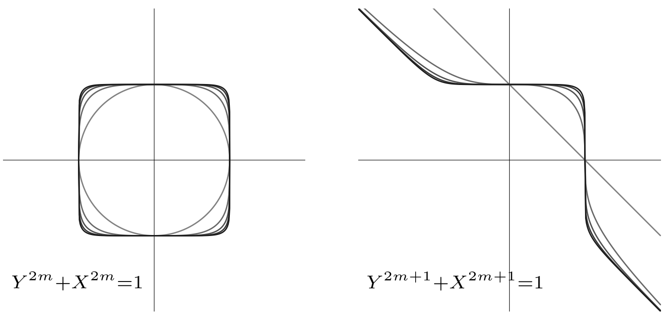
(7) Una curva con un punto triplo ordinario nell'origine (trifoglio): $(X^2+Y^2)^2+3X^2Y-Y^3$, e una curva con un punto quadruplo e due tangenti doppie nell'origine (quadrifoglio): $(X^2+Y^2)^3-4X^2Y^2$.



(8) Una famiglia di curve con un punto doppio nell'origine (bifogli): $X^4+Y^4-XY-p(X+Y)^2$ ($p \geqslant 0$).



(9) Pur non possedendo alcuna singolarità, presentiamo anche le curve di Fermat di equazioni $X^r+Y^r=1$:



1.7.7. Avviso. Si faccia attenzione al fatto che gli invarianti descritti (numero, molteplicità e ordine delle rette nel cono tangente) non sono sufficienti, e neppure particolarmente significativi, per descrivere i tipi di singolarità, a meno che non si tratti di singolarità ordinarie o cuspidi ordinarie. Nel quarto capitolo, svolgendo uno studio locale delle curve si potrà capire meglio la struttura di un punto singolare, che dipende anche dai termini superiori rispetto al complesso tangente.

2. Curve Razionali.

2.1. Definizione (Razionalità). *Una curva proiettiva irriducibile (di $\mathbb{P}$ piano proiettivo su K) si dice razionale se è immagine di una funzione $\varphi : \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}$ (detta parametrizzazione) non costante che si esprima in termini polinomiali (su K) in una (e dunque ogni) scelta di riferimenti proiettivi. In tal caso per ogni punto semplice P, la tangente in P ha direzione della derivata di φ in una qualunque delle due variabili.*

Una curva affine si dice razionale se una (e dunque ogni) sua chiusura proiettiva lo è.

In effetti la condizione di irriducibilità si può dedurre dalla seconda condizione (esistenza di una parametrizzazione polinomiale).

2.1.1. Tangenti. Si osservi che se $g(X)$ definisce una curva razionale di parametrizzazione $\varphi(\lambda,\mu)$, differenziando rispetto a λ l'identità $g(\varphi(\lambda,\mu))=0$ risulta $\nabla g(\varphi(\lambda,\mu))\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\lambda,\mu)=0$, da cui si deduce che $\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\lambda,\mu)$ appartiene alla tangente a g in $\varphi(\lambda,\mu)$, se il punto è semplice, e quindi tale tangente ha coordinate plückeriane date da $\varphi(\lambda,\mu)\times\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\lambda,\mu)$ (prodotto vettore), ogni volta che l'espressione è non nulla.

2.1.2. Grado. Tenendo conto che il grado di una curva piana si interpreta come il numero di punti di intersezione con generiche rette del piano, si vede che il grado della curva coincide con il grado (comune) dei polinomi che compaiono nella parametrizzazione (se non hanno fattori comuni).