1.7.2. *I punti multipli della curva $\mathscr{C}=V(g)$ in $\mathbb{P}^2(K)$ si trovano risolvendo il sistema*

$$\left\{\frac{\partial g}{\partial X_i}(X_0,X_1,X_2)=0\ :\ i=0,1,2\right. ,$$

e se P è un punto semplice di $\mathscr{C}$, allora la tangente in P a $\mathscr{C}$ ha equazione

$$\frac{\partial g}{\partial X_0}(P)X_0+\frac{\partial g}{\partial X_1}(P)X_1+\frac{\partial g}{\partial X_2}(P)X_2=0\ .$$

1.7.3. *Se $f(X,Y)=g(X_0,X_1,X_2)^{\mathrm{a}}$, allora i punti multipli di $\mathscr{C}=V(f)$ in $\mathbb{A}^2(K)$ si trovano risolvendo il sistema*

$$\begin{cases} F(X,Y)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial X}(X,Y)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial Y}(X,Y)=0 \end{cases}$$

e se $P=\binom{x}{y}$ è un punto semplice di $\mathscr{C}$, allora la tangente in P a $\mathscr{C}$ ha equazione

$$\frac{\partial f}{\partial X}(x,y)(X-x)+\frac{\partial f}{\partial Y}(x,y)(Y-y)=0\ .$$

1.7.4. Osservazione. *Una curva di grado d con un punto d-uplo si decompone in d rette del fascio per quel punto.*

Infatti ponendo il punto nell'origine usuale si vede solo un polinomio omogeneo in due variabili di grado d, che quindi si riduce in d rette per l'origine.

1.7.5. Condizioni lineari per le curve.

(1) il passaggio (semplice) per un punto di $\mathbb{P}^2(K)$ con una fissata retta tangente è una condizione lineare doppia;

(2) avere un fissato punto P di $\mathbb{P}^2(K)$ come punto m-plo è condizione lineare $\binom{m+1}{2}$-upla; fissare inoltre il cono tangente è condizione lineare (si tratta di ulteriori m condizioni lineari) di molteplicità $\binom{m+2}{2}-1$.

1.7.6. Esempi. Per introdurre gli esempi e la terminologia classici, conviene osservare che per un punto P di molteplicità m sono invarianti proiettivi: il numero s delle tangenti distinte (che è minore o uguale ad m), la molteplicità $m_1,\dots,m_s$ di ciascuna tangente nel complesso tangente (la loro somma dà m), e anche la molteplicità di intersezione nel punto di ciascuna tangente con la curva (ciascuna di queste molteplicità è strettamente maggiore di m, e talvolta si chiama ordine della tangente il numero $r_i=e_P(t_i\cdot\mathscr{C})-m_P(\mathscr{C})$). Quindi per ogni punto singolare consideriamo gli invarianti proiettivi $(s,(m_1,\dots,m_s),(r_1,\dots,r_s))$ e vediamo alcune forme che la singolarità può assumere:

(1) Si dice nodo un punto doppio con complesso tangente formato da due rette distinte entrambe d'ordine 1 (invarianti: $(2,(1,1),(1,1))$). Per esempio la curva di equazione proiettiva $X_0X_2^2=X_1^3+X_0X_2^2$ ed affine (usuale) $Y^2=X^3+X^2$ ha l'origine come punto doppio e complesso tangente descritto da $X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$.

(2) Si dice cuspide (ordinaria semplice) un punto doppio con complesso tangente formato da una retta doppia d'odine 1 (invarianti $(1,(2),(1))$). Per esempio la curva di equazione proiettiva $X_0X_2^2=X_1^3$ ed affine (usuale) $Y^2=X^3$ ha l'origine come punto doppio e complesso tangente