1.5.3. Sia $\mathscr{D}$ una ipersuperficie che sia un cono di vertice $v(\mathscr{D})$; scelte coordinate in modo che $v(\mathscr{D})$ abbia equazioni $X_0 = \cdots = X_r = 0$, allora $\mathscr{D} = \operatorname{div} g(\underline{X})$ con $g(\underline{X}) = g(X_0, \ldots, X_r)$, omogeneo.

$\operatorname{Supp}(\mathscr{D})$ è un cono se e solo se $\mathscr{D}$ ha punti d-upli (cioè punti di molteplicità massima), e allora il vertice $v(\operatorname{Supp}(\mathscr{D}))$ è dato dall'insieme dei punti d-upli. Se la dimensione del vertice è $n-1$, allora $\mathscr{D} = dH$ ove H è il vertice; se la dimensione è $n-2$, allora $\mathscr{D} = H_1 + \cdots + H_d$ con gli H_i iperpiani di cui almeno due distinti (la cui intersezione è il vertice del divisore).

1.5.4. È chiaro che la terminologia sopra impiegata è coerente, nel senso che per ogni punto P di una ipersuperficie $\mathscr{D}$, il cono tangente a $\mathscr{D}$ in P è un cono il cui vertice contiene P.

1.5.5. Esempi. I coni del piano sono le rette e le collezioni finite di rette d'un fascio.

1.5.6. Esempi. Un cono quadrico è una quadrica degenere (cioè la cui matrice, in qualsiasi riferimento, non abbia rango massimo), ed è irriducibile se e solo se ha rango r maggiore di due. Il vertice ha dimensione $n - r$ se n è la dimensione dello spazio e r il rango delle quadrica.

Se $\mathscr{Q}$ è una quadrica affine (non degenere) a centro (cioè una quadrica proiettiva non degenere non tangente all'iperpiano improprio H_∞), allora il cono asintotico di $\mathscr{Q}$ è definito come il cono che proietta $\mathscr{Q} \cap H_\infty$ dal centro di $\mathscr{Q}$. Se q è l'equazione della quadrica, e h_∞ è l'equazione di H_∞, allora il cono asintotico ha equazione $q + \alpha h_\infty^2$ con α determinato dalla condizione che il cono contenga il centro di $\mathscr{Q}$.

1.6. Condizioni lineari. Abbiamo ora la possibilità di fare altri esempi di condizioni lineari sulle ipersuprficie:

(0) Il passaggio (semplice) per un punto di $\mathbb{P}^n(K)$ è una condizione lineare semplice, e fissare l'iperpiano tangente porta ad una condizione lineare n-upla;

(1) avere un fissato punto P di $\mathbb{P}^n(K)$ come punto doppio dà ulteriori n condizioni lineari, ed è quindi condizione lineare $(n+1)$-upla; fissare il cono tangente dà ulteriori $\binom{n+1}{2} - 1$ condizioni lineari, e quindi è condizione lineare di molteplicità $\binom{n+2}{2} - 1$;

(3) avere un fissato punto P di $\mathbb{P}^n(K)$ come punto m-plo è condizione lineare $\binom{n+m-1}{m-1}$-upla; fissare inoltre il cono tangente dà ulteriori $\binom{n+m-1}{m} - 1$ condizioni lineari, ed è quindi condizione lineare di molteplicità $\binom{n+m}{m} - 1$;

Questi risultati possono essere visti facilmente ponendo che il punto in questione sia l'origine, e usando i coefficienti $a_{\underline{\alpha}}$ di un generico polinomio $g = \sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}} X^{\underline{\alpha}}$ quali coordinate per lo spazio proiettivo dei divisori di grado fissato; le condizioni di molteplicità d'ordine m sono condizioni di annullamento di alcune di tali coordinate, mentre le condizioni sui coni tangenti sono di proporzionalità tra alcune coordinate.

1.7. Caso di curve. Se $\mathscr{C}$ è un divisore del piano, cioè una curva, allora le cose sono ancora più semplici. *Se $\mathscr{C} = \operatorname{div}(g)$ con $g \in K[\underline{X}]_{\mathrm{h}} := K[X_0, X_1, X_2]_{\mathrm{h}}$ è di grado d e P un punto del supporto, allora le rette del fascio per P hanno tutte la stessa molteplicità di intersezione $m_P(\mathscr{C})$ in P con $\mathscr{C}$, tranne un numero finito (che sono le rette tangenti in P a $\mathscr{C}$), che hanno molteplicità maggiore.*

Supponiamo che P sia l'origine il primo punto del riferimento, e sviluppiamo l'espressione di g in $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\X_1\\X_2\end{pmatrix}$:

$$g(1, tX_1, tX_2) = g(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\X_1\\X_2\end{pmatrix}) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2} D_\alpha g(1,0,0) X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} t^{\alpha_1+\alpha_2}$$

da cui si vede che la parte omogenea di grado i in t è esattamente la parte omogenea di grado i in $g(1, X_1, X_2)$, dunque del polinomio affinizzato rispetto a X_0.

1.7.1. *In un riferimento affine in cui P è l'origine del riferimento, e*

$$g(X_0, X_1, X_2)^{\mathrm{a}} = f(X,Y) = f_s(X,Y) + f_{s+1}(X,Y) + \cdots + f_d(X,Y)$$

con $f_i(X,Y) \in K[X,Y]$ omogeneo di grado i ed $f_s(X,Y) \neq 0$, allora $m_P(\mathscr{C}) = s$ e

$$f_s(X,Y) = \prod\nolimits_i (a_i X - b_i Y)^{l_i}$$

si dice l'equazione complessiva delle tangenti in P a $\mathscr{C}$. Si ha $\operatorname{div} f_s(X,Y) = \sum_i l_i r_i$ dove $r_i = \operatorname{div}(a_i X - b_i Y)$. Il numero l_i si dice molteplicità di r_i come tangente in P a $\mathscr{C}$. Per ogni altra retta $r = \operatorname{div}(aX - bY)$ distinta dalle r_i, abbiamo $m_P(r \cdot \mathscr{C}) = s$.