e sviluppando i termini seguendo le potenze di μ (perché $\mu=0$ dà come soluzione il punto P) abbiamo

$$g(\lambda P+\mu X)=\sum_{|\underline{\alpha}|=1} D_{\underline{\alpha}}g(P)X^{\underline{\alpha}}\lambda^{d-1}\mu+\sum_{|\underline{\alpha}|=2} D_{\underline{\alpha}}g(P)X^{\underline{\alpha}}\lambda^{d-2}\mu^2+\cdots+\sum_{|\underline{\alpha}|=d} D_{\underline{\alpha}}g(P)X^{\underline{\alpha}}\mu^d$$

da cui è chiaro che il punto P è semplice se e solo se il termine $\sum_{|\underline{\alpha}|=1} D_{\underline{\alpha}}g(P)X^{\underline{\alpha}}$ non si annulla identicamente; in tal caso questo termine si scrive $\nabla g(P)\underline{X}=0$, cioè

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial X_0}(P) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial X_n}(P)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial g}{\partial X_i}(P)X_i=0\ ,$$

e identifica un iperpiano che contiene tutte e sole le rette per P per cui la molteplicità di intersezione con $\mathscr{D}$ in P è maggiore di 1 (iperpiano tangente, rette tangenti).

Viceversa un punto P è singolare per $\mathscr{D}$ se e solo se $D_{\underline{\alpha}}g(P)=0$ per ogni $\underline{\alpha}$ con $|\underline{\alpha}|=1$, ovvero se tutte le derivate parziali di g si annullano in P:

$$\left\{\frac{\partial g}{\partial X_i}(\underline{X})=0 \quad \text{per ogni } i=0,1,\dots,n\right.$$

(nel qual caso P appartiene al supporto del divisore, vista la relazione di Eulero).

Precisamente: P è un punto m-uplo se e solo se le iperderivazioni di g d'ordini minori di m (basta per $m-1$ in caratteristica zero) si annullano in P, e almeno una delle iperderivate di g d'ordine m non si annulla in P. In tal caso il termine

$$\sum_{|\underline{\alpha}|=m} D_{\underline{\alpha}}g(P)X^{\underline{\alpha}}$$

non è identicamente nullo e il suo divisore si chiama il complesso tangente a $\mathscr{D}$ in P (il supporto del complesso tangente si dice il cono tangente a $\mathscr{D}$ in P).

1.3.1. Riducibilità e singolarità. Se l'ipersuperficie $\mathscr{D}$ è riducibile, allora tutti i punti di intersezione delle sue componenti sono punti singolari per $\mathscr{D}$, come segue subito dalla caratterizzazione differenziale. Dunque: *se una ipersuperficie proiettiva non ha punti singolari, essa è necessariamente irriducibile.*

1.4. Coordinate affini. In un riferimento in cui P sia l'origine (affine usuale) se $f(\underline{T})=g(\underline{X})^{\mathrm{a}}\in K[\underline{T}]$ e scriviamo

$$f(\underline{T})=f_s(\underline{T})+f_{s+1}(\underline{T})+\cdots+f_d(\underline{T})$$

in cui ogni $f_i(\underline{T})$ è omogeneo di grado i e $f_s(\underline{T})\neq 0$, allora $m_P(\mathscr{D})=s$ e $\operatorname{div}(f_s(\underline{T}))$ è il complesso tangente di $\mathscr{D}$ in P. Infatti, basta applicare il calcolo differenziale algebrico alla espressione $g(X_0\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\X_1\\ \vdots\\X_n\end{pmatrix})$, e poi affinizzare rispetto a X_0.

Quindi i punti multipli di $\mathscr{D}=V(f)$ si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f(\underline{T})=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial T_i}(\underline{T})=0 \quad \text{per ogni } i=1,\dots,n\end{cases}$$

e se P è un punto semplice di $\mathscr{D}$, allora l'iperpiano tangente in P a $\mathscr{D}$ ha equazione $\nabla f(P)(\underline{T}-P)=0$, cioè

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial T_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial T_n}(P)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1-P_1\\ \vdots\\ T_n-P_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial T_i}(P)(T_i-P_i)=0\ .$$

1.5. Coni. Per spiegare la terminologia sopra impiegata, diamo la definizione generale di cono. Quasi tutte le asserzioni che faremo sono elementari, e si tratta di esercizi per il lettore.

1.5.1. Sia $\mathscr{C}$ un sottinsieme di $\mathbb{P}^n(K)$; definiamo il vertice $v(\mathscr{C})$ di $\mathscr{C}$ come l'insieme dei punti P di $\mathscr{C}$ per cui $P\vee Q\subseteq\mathscr{C}$ per ogni $Q\in\mathscr{C}$. Allora il vertice risulta una varietà lineare di $\mathbb{P}^n(K)$ e se non è vuoto, $\mathscr{C}$ si dice un cono di vertice $v(\mathscr{C})$.

1.5.2. Un cono $\mathscr{C}$ è varietà lineare se e solo se $\mathscr{C}=v(\mathscr{C})$ (coincide con il proprio vertice). Se $\mathscr{C}$ è un cono, e M è varietà complementare al vertice $v(\mathscr{C})$, allora $\mathscr{C}$ coincide con la proiezione dal vertice di $M\cap\mathscr{C}$: $\mathscr{C}=\bigcup_{Q\in M\cap\mathscr{C}} v(\mathscr{C})\vee Q$. Viceversa, se L ed M sono due varietà complementari, allora la proiezione da L di un sottinsieme di M è un cono il cui vertice contiene L.