da cui, eguagliando i coefficienti delle potenze di u, e valutando per $t = 1$, si generalizza la formula di Eulero per ogni i nella forma

$$\binom{d}{i} g(\underline{X}) = \sum_{|\underline{\alpha}|=i} \underline{X}^{\underline{\alpha}} D_{\underline{\alpha}} g(\underline{X}) \ .$$

Nel caso di corpi di caratteristica nulla, si può esplicitare in termini delle derivazioni nella forma

$$\binom{d}{i} g(\underline{X}) = \sum_{|\underline{\alpha}|=i} \frac{1}{\underline{\alpha}!} \underline{X}^{\underline{\alpha}} \left(\frac{\partial}{\partial \underline{X}}\right)^{\underline{\alpha}} g(\underline{X}) = \sum_{|\underline{\alpha}|=i} \frac{1}{\underline{\alpha}!} \underline{X}^{\underline{\alpha}} \frac{\partial^{|\underline{\alpha}|} g}{\partial \underline{X}^{\underline{\alpha}}}(\underline{X}) \ .$$

0.5.1. Problema. Applicando la formula di Eulero a $D_{\underline{\alpha}} g(\underline{X})$ (omogeneo di grado $d - |\underline{\alpha}|$), verificare che

$$\binom{d-|\underline{\alpha}|}{i} D_{\underline{\alpha}} g(\underline{X}) = \sum_{|\underline{\gamma}|=|\underline{\alpha}|+i} \binom{\underline{\gamma}}{\underline{\alpha}} X^{\underline{\gamma}-\underline{\alpha}} D_{\underline{\gamma}} g(\underline{X})$$

(per $i \leqslant d - |\alpha|$), e in particolare, per $i = d - |\alpha|$, si ottiene

$$D_{\underline{\alpha}} g(\underline{X}) = \sum_{|\underline{\gamma}|=d} \binom{\underline{\gamma}}{\underline{\alpha}} X^{\underline{\gamma}-\underline{\alpha}} D_{\underline{\gamma}} g(\underline{X})$$

(generalizza una delle formule classiche di Eulero).

0.6. Regole di reciprocità. È una facile ma importante osservazione che se $g \in K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$ è polinomio omogeneo, allora si ha

$$\sum_{|\underline{\alpha}|=i} D_{\underline{\alpha}} g(\underline{X}) \underline{Y}^{\underline{\alpha}} = \sum_{|\underline{\alpha}|=\deg g-i} D_{\underline{\alpha}} g(\underline{Y}) \underline{X}^{\underline{\alpha}}$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$. Infatti, basta confrontare i termini estremi dell'uguaglianza ovvia

$$\sum_{\underline{\beta}} D_{\underline{\beta}} g(\underline{Y}) \underline{X}^{\underline{\beta}} = g(\underline{Y} + \underline{X}) = g(\underline{X} + \underline{Y}) = \sum_{\underline{\alpha}} D_{\underline{\alpha}} g(\underline{X}) \underline{Y}^{\underline{\alpha}}$$

tenendo conto dei termini di uguale grado (se $g \in K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$ è polinomio omogeneo allora $D_{\underline{\alpha}} g(\underline{X})$ è omogeneo di grado $\deg g - |\underline{\alpha}|$).

1. Punti singolari e complessi tangente.

1.1. Intersezioni di ipersupeficie con rette. Sia $\mathscr{D} = \operatorname{div}(g(\underline{X})) \in \operatorname{Div}(\mathbb{P})$ un divisore effettivo di grado d, e sia $P \in \operatorname{Supp} \mathscr{D}$. Per ogni retta r della stella di centro P (che non sia contenuta in $\operatorname{Supp} \mathscr{D}$ è definito il ciclo intersezione $r \cdot \mathscr{D} = \sum_{R \in r} e_R(r \cdot \mathscr{D}) R$ (se $\lambda P + \mu Q$ sono equazioni parametriche per r, allora si tratta di $\operatorname{div} g(\lambda P + \mu Q) \in \operatorname{Div}(r)$), ove certamente $e_P(r \cdot \mathscr{D}) \geqslant 1$ per ogni retta r.

Se $\operatorname{Supp}(r \cdot \mathscr{D}) = \{P_1, \ldots, P_s\}$, risulta $s \leqslant d$, $\sum_{i=1}^s e_{P_i}(r \cdot \mathscr{D}) = d$ ed $e_R = 0$ se $R \notin \{P_1, \ldots, P_r\}$.

1.2. Definizione (Molteplicità, Punti singolari). *Sia $P \in \operatorname{Supp} \mathscr{D}$. La molteplicità di $\mathscr{D}$ in P è il numero intero $m_P(\mathscr{D})$ dato dal minimo dei valori $e_P(r \cdot \mathscr{D})$ al variare di r nella stella di rette per P. Se $P \notin \operatorname{Supp} \mathscr{D}$, definiamo $m_P(\mathscr{D}) = 0$.*

Il punto P si dice semplice, doppio, triplo, m-uplo per $\mathscr{D}$ se $m_P(\mathscr{D}) = 1, 2, 3, m$ rispettivamente. Un punto si dice singolare se non è semplice, cioè se $m_P(\mathscr{D}) > 1$.

1.2.1. Siccome $e_P(r \cdot \mathscr{D}) \leqslant d$ per ogni retta r, abbiamo che $m_P(\mathscr{D}) \leqslant d$ per ogni punto P.

1.2.2. Se $\mathscr{D}$ e $\mathscr{D}'$ sono due divisori di $\mathbb{P}$ e P un punto di $\mathbb{P}$ allora $m_P(\mathscr{D}+\mathscr{D}') = m_P(\mathscr{D}) + m_P(\mathscr{D}')$.

1.2.3. Rette e varietà lineari tangenti. Una retta r per P si dice tangente in P a $\mathscr{D}$ se e solo se $e_P(r \cdot \mathscr{D}) > m_P(\mathscr{D})$. Una varietà lineare passante per P si dice tangente in P a $\mathscr{D}$ se e solo se ogni sua retta per P lo è. In particolare, se L è tangente a $\mathscr{D}$ in P, allora ogni sottovarietà di L passante per P è tangente a $\mathscr{D}$ in P

1.3. Caratterizzazione differenziale dei punti singolari. Scegliamo un riferimento e supponiamo $g(\underline{X}) \in K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$ sia un'equazione per $\mathscr{D}$. Allora abbiamo per una retta per P di equazioni parametriche $\lambda P + \mu X$

$$g(\lambda P + \mu X) = \sum_{\underline{\alpha}} D_{\underline{\alpha}} g(\lambda P)(\mu X)^{\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{\alpha}} D_{\underline{\alpha}} g(P) X^{\underline{\alpha}} \lambda^{d-|\underline{\alpha}|} \mu^{|\underline{\alpha}|}$$