Per esercizio, scrivere per esteso le formule precedenti per multindici $\underline{\alpha}$ di lunghezza fino a 4.

0.3.2. Caratteristica zero. Se il corpo è di caratteristica zero, allora dalle formule di composizione si vede subito che le iperderivazioni si ottengono a partire dalle usuali derivazioni:

$$D_{\underline{\alpha}} = \frac{1}{\alpha!} D_{e_1}^{\alpha_1} \cdots D_{e_n}^{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial X_n}\right)^{\alpha_n}$$

e la formula usata per definire le iperderivazioni si riscrive come la usuale formula di Taylor per polinomi.

♠ **0.3.3.** Caratteristica positiva. Se il corpo è di caratteristica $p > 0$, allora le derivazioni non sono sufficienti per definire tutte le iperderivazioni: non appena la lunghezza del multiindice supera p, i fattoriali si annullano e i coefficenti binomiali che entrano nelle formule devono essere valutati esplicitamente.

Sia $\mathrm{ord}_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ la funzione "ordine in p"; cioè se $z = \frac{a}{b} p^r$ con a, b primi con p, e $r \in \mathbb{Z}$, allora $\mathrm{ord}_p(z) = r$. Sia $\mathbb{Z}_p$ il sottogruppo di $\mathbb{Q}$ con ordine in p non negativo, per cui $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Se $n \in \mathbb{N}$ e $n = n_0 + n_1 p + \cdots n_h p^h$ è il suo sviluppo in base p, abbiamo

$$\mathrm{ord}_p(n!) = n_1 + n_2 \frac{p^2-1}{p-1} + \cdots + n_h \frac{p^h-1}{p-1} = \frac{n - (n_0+n_1+\cdots+n_h)}{p-1} \ .$$

Di conseguenza se

$$N = \frac{n!}{(p!)^{n_1} \cdots (p^h!)^{n_h}}$$

risulta $\mathrm{ord}_p N = 0$, dunque $N \in \mathbb{Z}_p \smallsetminus p\mathbb{Z}_p$ e definiamo $c(n) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ come il rappresentante di $N + p\mathbb{Z}_p \in \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$.

Ora, se $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha_i = \beta_{0i} + \beta_{1i} p + \cdots + \beta_{h_i i} p^{h_i}$ e definiamo $c(\alpha) = \prod_i c(\alpha_i)$ abbiamo

$$D_{\underline{\alpha}} = c(\alpha) D_{e_1}^{\beta_{01}} D_{pe_1}^{\beta_{11}} \cdots D_{p^{h_1} e_1}^{\beta_{h_1 1}} \cdots D_{e_n}^{\beta_{0n}} D_{pe_n}^{\beta_{1n}} \cdots D_{p^{h_n} e_n}^{\beta_{h_n n}} \ .$$

0.4. Sostituzione (Regole della catena). Siano $f(\underline{V}) \in K[V_1, \ldots, V_m]$ e $g_i(\underline{T}) \in K[T_1, \ldots, T_n]$ per $i = 1, \ldots, m$. Allora abbiamo

$$D_{e_i} f(g(\underline{T})) = \sum_{j=1}^m D_{e_j} f(g(\underline{T})) D_{e_i} g_j(\underline{T}) \ , \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial}{\partial T_i} f(g(\underline{T})) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial V_j}(g(\underline{T})) \frac{\partial g_j}{\partial T_i}(\underline{T}) \ .$$

Questa regola, come pure regole di calcolo per iperderivazioni superiori, si ottiene osservando che il termine

$$f \circ g(\underline{T} + \underline{U}) = f(g(\underline{T} + \underline{U})) = \sum_{\underline{\alpha}} D_{\underline{\alpha}} f(g(\underline{T})) \underline{U}^{\underline{\alpha}} = f(g(\underline{T})) + \sum_{i=1}^n D_{e_i} f(g(\underline{T})) U_i + \cdots$$

si calcola anche nel seguente modo:

$$f(g(\underline{T} + \underline{U})) = f(\sum_{\underline{\beta_i}} D_{\underline{\beta_i}} g_i(\underline{T}) \overline{U}^{\underline{\beta_i}}) = f(g(T)) + \sum_{\underline{\alpha}} (D_{\underline{\alpha}} f) g(T) \prod_i (\sum_{\underline{\beta_i} \neq 0} D_{\underline{\beta_i}} g_i(\underline{T}) \underline{U}^{\underline{\beta_i}})^{\alpha_i}$$

poiché $g_i(\underline{T} + \underline{U}) = g_i(T) + \sum_{\underline{\beta_i} \neq 0} D_{\underline{\beta_i}} g_i(\underline{T}) \underline{U}^{\underline{\beta_i}}$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. Per riconoscere i termini di primo grado in $\underline{U}$ non vi sono difficoltà (per gli altri bisogna avere buona vista).

0.5. Formule di Eulero. Se $g \in K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$ è omogeneo di grado $d = \deg(g)$, allora risulta

$$\deg(g) g(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i D_{e_i} g(\underline{X}) \quad \text{ovvero} \quad \deg(g) g(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial g}{\partial X_i}(\underline{X})$$

(valutando in 1 la derivazione di $g(t\underline{X}) = t^d g(\underline{X})$).

Più in generale, sviluppando l'espressione $g((t+u)\underline{X}) = (t+u)^d g(\underline{X})$ si ottengono le uguaglianze

$$\sum_{\underline{\alpha}} \underline{X}^{\underline{\alpha}} D_{\underline{\alpha}} g(\underline{X}) t^{d-|\underline{\alpha}|} u^{|\underline{\alpha}|} = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} g(\underline{X}) t^{d-i} u^i$$