da cui otteniamo che
$$D_j(f)=\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}a_iT^{i-j}\ ,$$
e nel caso di corpi di caratteristica zero si ha che $D_j(f)=\frac{1}{j!}\sum_{i=j}^{n}\frac{i!}{(i-j)!}a_iT^{i-j}=\frac{1}{j!}\frac{d^j}{dT^j}f$.

0.2.2. Il calcolo si generalizza a più indeterminate nel modo ovvio: se $f(\underline{T})=\sum_{\underline{\alpha}}a_{\underline{\alpha}}\underline{T}^{\underline{\alpha}}$ allora
$$f(\underline{T}+\underline{U})=\sum_{\underline{\alpha}}a_{\underline{\alpha}}(\underline{T}+\underline{U})^{\underline{\alpha}}=\sum_{\underline{\alpha}}a_{\underline{\alpha}}\sum_{\underline{\beta}\leqslant\underline{\alpha}}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}\underline{T}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}\underline{U}^{\underline{\beta}}=\sum_{\underline{\beta}}\sum_{\underline{\alpha}\geqslant\underline{\beta}}a_{\underline{\alpha}}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}\underline{T}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}\underline{U}^{\underline{\beta}}$$
da cui otteniamo
$$D_{\underline{\beta}}(f)=\sum_{\underline{\alpha}\geqslant\underline{\beta}}\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}a_{\underline{\alpha}}\underline{T}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}\ .$$
In particolare le iperderivazioni D_{e_i} coincidono con le derivazioni parziali usuali $\frac{\partial}{\partial T_i}$.

Dimostrazione. L'unica proprietà dell'enunciato che non segue in modo ovvio dalle formule esplicite sopra date è la regola di Leibniz che si dimostra confrontando i coefficienti di potenze omologhe di U nei due sviluppi di $f(\underline{T}+\underline{U})g(\underline{T}+\underline{U})=fg(\underline{T}+\underline{U})$. Il primo dà
$$f(\underline{T}+\underline{U})g(\underline{T}+\underline{U})=\Big(\sum_{\underline{\beta}}(D_{\underline{\beta}}f)(\underline{T})\underline{U}^{\underline{\beta}}\Big)\Big(\sum_{\underline{\gamma}}(D_{\underline{\gamma}}g)(\underline{T})\underline{U}^{\underline{\gamma}}\Big)=\sum_{\underline{\alpha}}\Big(\sum_{\underline{\beta}+\underline{\gamma}=\underline{\alpha}}(D_{\underline{\beta}}f)(\underline{T})(D_{\underline{\gamma}}g)(\underline{T})\Big)\underline{U}^{\underline{\alpha}}$$
mentre il secondo è per definizione
$$(fg)(\underline{T}+\underline{U})=\sum_{\underline{\alpha}}D_{\underline{\alpha}}(fg)(\underline{T})\underline{U}^{\underline{\alpha}}\ ,$$
da cui seguono le formule volute. □

0.3. Composizioni di iperderivazioni. Se abbiamo due multiindici $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$, la composizione delle corrispondenti iperderivazioni dà
$$D_{\underline{\alpha}}D_{\underline{\beta}}=D_{\underline{\beta}}D_{\underline{\alpha}}=\binom{\underline{\alpha}+\underline{\beta}}{\underline{\alpha}}D_{\underline{\alpha}+\underline{\beta}}\ .$$
La formula si itera in
$$D_{\underline{\alpha}_1}\cdots D_{\underline{\alpha}_m}=\frac{(\underline{\alpha}_1+\cdots+\underline{\alpha}_m)!}{(\underline{\alpha}_1!)\cdots(\underline{\alpha}_n!)}D_{\underline{\alpha}_1+\cdots+\underline{\alpha}_m}$$
e in particolare dà
$$(\underline{\alpha}!)D_{\underline{\alpha}}=D_{e_1}^{\alpha_1}\cdots D_{e_n}^{\alpha_n}=\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial X_n}\right)^{\alpha_n}$$
Per provare la prima formula, basta confrontare i due sviluppi possibili dell'espressione con tre n-uple di variabili $f(\underline{T}+\underline{U}+\underline{V})$, il primo usando due volte la definizione di iperderivazioni:
$$f(\underline{T}+\underline{U}+\underline{V})=\sum_{\underline{\alpha}}D_{\underline{\alpha}}f(\underline{T}+\underline{U})\underline{V}^{\underline{\alpha}}=\sum_{\underline{\alpha}}\sum_{\underline{\beta}}D_{\underline{\beta}}(D_{\underline{\alpha}}f(\underline{T}))\underline{U}^{\underline{\beta}}\underline{V}^{\underline{\alpha}}$$
e il secondo usando la definizione di iperderivazioni e lo sviluppo delle potenze:
$$f(\underline{T}+\underline{U}+\underline{V})=\sum_{\underline{\gamma}}D_{\underline{\gamma}}f(\underline{T})(\underline{U}+\underline{V})^{\underline{\gamma}}=\sum_{\underline{\gamma}}D_{\underline{\gamma}}f(\underline{T})\sum_{\underline{\alpha}+\underline{\beta}=\underline{\gamma}}\binom{\underline{\gamma}}{\underline{\alpha}}\underline{U}^{\underline{\beta}}\underline{V}^{\underline{\alpha}}=\sum_{\underline{\alpha}}\sum_{\underline{\beta}}\binom{\underline{\alpha}+\underline{\beta}}{\underline{\alpha}}D_{\underline{\alpha}+\underline{\beta}}(\underline{T})\underline{U}^{\underline{\beta}}\underline{V}^{\underline{\alpha}}\ .$$
La seconda formula è una iterata della prima con semplificazioni telescopiche dei fattoriali. La terza segue subito dalla seconda poiché $\underline{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i$ e usando che $\alpha_i!D_{\alpha_ie_i}=D_{e_i}^{\alpha_i}$ (dalla prima formula, o anche dalla seconda).

0.3.1. Esempi. Può essere utile esplicitare i primi casi di n per fissare le idee:
per $n=1$ risulta $\alpha!D_\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{\alpha}$,
per $n=2$ risulta $\alpha_1!\alpha_2!D_{(\alpha_1,\alpha_2)}=\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial X_2}\right)^{\alpha_2}$,
per $n=3$ risulta $\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!D_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}=\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial X_2}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial X_3}\right)^{\alpha_3}$.