Capitolo II

Singolarità di Ipersuperficie

In questo capitolo studieremo le nozioni di singolarità e di spazio tangente per i punti di una ipersuperficie. Si introdurà allo scopo una nozione di calcolo differenziale algebrico per polinomi che è del tutto indipendente dall'analisi e non richiede calcolo infinitesimale o nozione di limiti.

Gli strumenti introdotti sono piuttosto semplici, ma le loro applicazioni già molto importanti e cercheremo di mostrarle introducendo varie costruzioni classiche, tra cui le nozioni di curve razionali, curve polari, curve hessiane, curve duali. Avremo inoltre gli strumenti per procedere alla classificazione proiettiva delle cubiche e allo studio della fondamentale nozione di struttura di gruppo (di Poincaré) sulle curve ellittiche.

0. Calcolo differenziale per polinomi.

0.1. Notazioni sui multiindici. Se $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $\underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ sono multiindici, usiamo come d'usuale:
$|\underline{\alpha}| = \sum_i \alpha_i$ (lunghezza del multiindice);
$\underline{\alpha}! = \prod_i (\alpha_i!)$ (fattoriale del multiindice);
$\underline{\alpha} + \underline{\beta} = (\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_n+\beta_n) \in \mathbb{N}^n$ (somma di multiindici),
$\binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}} = \prod_i \binom{\alpha_i}{\beta_i}$ (binomiale di multiindici),
diciamo $\underline{\alpha} \leqslant \underline{\beta}$ se $\alpha_i \leqslant \beta_i$ per ogni i.

Se abbiamo due insiemi di indeterminate $\underline{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ e $\underline{U} = (U_1, \ldots, U_n)$, poniamo $\underline{T}+\underline{U} = (T_1 + U_1, \ldots, T_n + U_n)$ e risulta che

$$(\underline{T}+\underline{U})^{\underline{\alpha}} = \sum_{\underline{0}\leqslant\underline{\beta}\leqslant\underline{\alpha}} \binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}} \underline{T}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}} \underline{U}^{\underline{\beta}}$$

(formula multi-binomiale).

0.2. Definizione-Teorema (Iperderivazioni algebriche). *Sia $f(\underline{T}) \in K[\underline{T}] = K[T_1, \ldots, T_n]$ e $\underline{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ un'altra n-upla di indeterminate; tramite la posizione*

$$f(\underline{T}+\underline{U}) = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^n} (D_{\underline{\alpha}} f)(\underline{T}) \underline{U}^{\underline{\alpha}}$$

definiamo per ogni multiindice $\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^n$ i polinomi $(D_{\underline{\alpha}} f)(\underline{T})$, e dunque le applicazioni $D_{\underline{\alpha}}$ di $K[\underline{T}]$ in sè, verificanti le seguenti proprietà ($f, g \in K[\underline{T}]$, $c \in K$):
(0) $D_0 = \mathrm{id}_{K[\underline{T}]}$ (i.e. $f(\underline{T}+\underline{U}) \in f(\underline{T}) + \underline{U}K[\underline{T}, \underline{U}]$),
(1) $D_{\underline{\alpha}}(c) = 0$ (se $\alpha \neq 0$),
(2) $D_{\underline{\alpha}}(cf) = cD_{\underline{\alpha}}(f)$ e $D_{\underline{\alpha}}(f+g) = D_{\underline{\alpha}}(f)+D_{\underline{\alpha}}(g)$ (linearità),
(3) $D_{\underline{\alpha}}(fg) = \sum_{\underline{\beta}+\underline{\gamma}=\underline{\alpha}} D_{\underline{\beta}}(f)D_{\underline{\gamma}}(g)$ (regola di Leibniz).
Abbiamo poi che

$$D_{\underline{\beta}}(\underline{T}^{\underline{\alpha}}) = \begin{cases} \binom{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}} \underline{T}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}} & \text{se } \underline{\beta} \leqslant \underline{\alpha} \\ 0 & \text{se } \underline{\beta} \nleqslant \underline{\alpha} \end{cases}$$

ed in particolare $D_{e_i} = \frac{\partial}{\partial T_i}$.
Se $\deg f = d$ allora $\deg(D_{\underline{\alpha}} f) = d-|\alpha|$.

0.2.1. Se $f(T) = \sum_{i=0}^n a_i T^i \in K[T]$, allora abbiamo

$$f(T + U) = \sum_{i=0}^n a_i (T + U)^i = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} T^{i-j} U^j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n \binom{i}{j} a_i T^{i-j} U^j$$