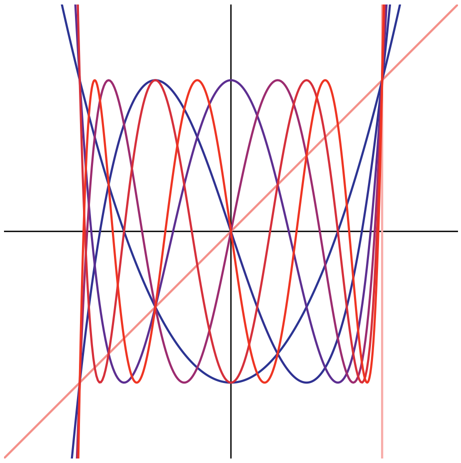
4.15. Polinomi e Curve di Chebyshev. I polinomi di Chebyshev $T_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ sono definiti dalla proprietà seguente: $T_n(\cos\vartheta) = \cos(n\vartheta)$ (per $n \in \mathbb{N}$). Mostrare:

4.15.1. la formula chiusa $T_n(X) = \sum_{h=0,\ pari}^{n} \binom{n}{h}(X^2-1)^{h/2}X^{n-h}$ (sugg.: si consideri la parte reale di $e^{in\vartheta} = (e^{i\vartheta})^n$);

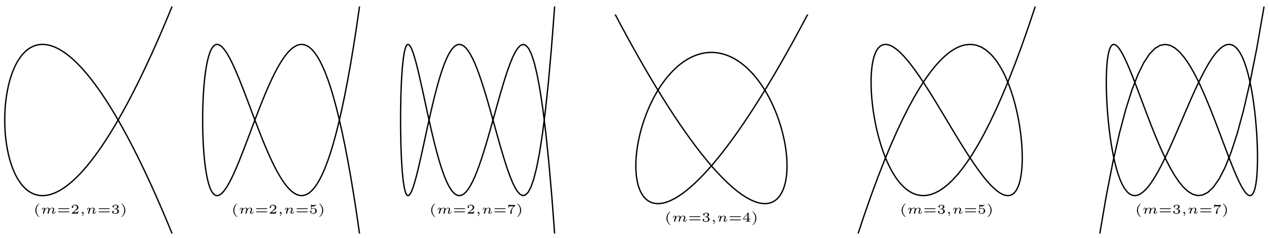
4.15.2. la formula ricorsiva $T_{n+1}(X) = XT_n(X) - T_{n-1}(X)$ (sugg.: si applichino ben note formule trigono a $\cos((n{+}1)\vartheta)$);

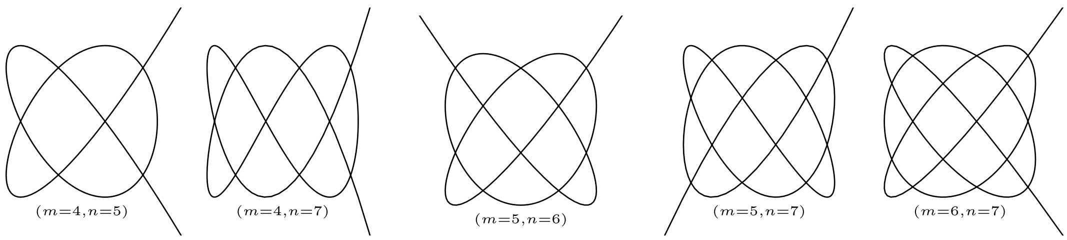
4.15.3. in particolare

$$\begin{aligned}
T_0(X) &= 1\\
T_1(X) &= X\\
T_2(X) &= 2X^2-1\\
T_3(X) &= 4X^3-3X\\
T_4(X) &= 8X^4-8X^2+1\\
T_5(X) &= 16X^5-20X^3+5X\\
T_6(X) &= 32X^6-48X^4+18X^2-1\\
T_7(X) &= 64X^7-112X^5+56X^3-7X
\end{aligned}$$



Si considerino ora le curve definite dalla chiusura proiettiva della immagine di $\varphi_{m,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con $m < n$ definite da $\varphi_{m,n}(X) = \binom{T_m(X)}{T_n(X)}$. Si tratta delle curve di Chebyshev: se m ed n sono coprimi si tratta di curve algebriche irriducibili, di grado n ed equazione affine $T_n(X) = T_m(Y)$, e hanno la proprietà di avere esattamente $\frac{1}{2}(m{-}1)(n{-}1)$ punti singolari doppi ordinari, tutti reali e concentrati in un quadrato:





4.16. Quadrilatero articolato e curve di Watt. Un quadrilatero articolato è un dispositivo formato da tre segmenti fissi incernierati ciascuno sul successivo, il primo e l'ultimo estremo in posizioni fisse sul piano. Scelto un punto P del segmento centrale, l'insieme delle posizioni che esso assume sotto i possibili movimenti del dispositivo è una curva del piano, detta curva di Watt. Eccone